UNIVERSIDAD NACIONAL DANIEL ALCIDES CARRIÓN

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

ESCUELA DE FORMACIÓN PROFESIONAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

LA TEORÍA DE GRAFOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS PARA ESTUDIANTES DEL LABORATORIO DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN PEDAGÓGICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DANIEL ALCIDES CARRIÓN DE PASCO – 2014.

TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN EDUCACIÓN

MENCIÓN: *MATEMÁTICA - FÍSICA*

AUTOR : Romel Félix CAPCHA VENTURA

ASESOR : Dr. Armando CARHUACHIN MARCELO

CERRO DE PASCO – 2015

*A **DIOS**, a Mis Padres y*
La Universidad Nacional
Daniel Alcides Carrión de Pasco.
.

Índice **Pág.**

Carátula 01
Hoja de respeto 02
Dedicatoria 03
Índice 04
Introducción 06
CAPITULO I: PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA
1.1. Identificación y determinación del problema 08
1.2. Formulación del problema 09
1.2.1. Problema general 10
1.2.2. Problemas específicos 10
1.3. Formulación de objetivos 10
1.3.1. Objetivo general 10
1.3.2. Objetivos específicos 10
1.4. Importancia y alcances de la investigación 10
CAPITULO II: MARCO TEÓRICO
2.1. Antecedentes del estudio 12
2.2. Bases teórico-científicos 18
2.2.1. Los grafos 18
2.2.2. Leonhard Euler y la teoría de grafos 19
2.2.3. Conceptos previos y terminología 23
2.2.4. Subgrafos 25
2.2.5. Ejemplos de problemas en la teoría de grafos 25
2.2.6. Multigrafo 27
2.2.7. Grafo 28
2.2.8. Un sub grafo 29
2.2.9. Grafo dirigido o dígrafo 30
2.2.10. Demostración de algunos teoremas 30
2.2.11. Optimización combinatoria 34
2.2.12. Cálculo 36
2.2.13. Cálculo aritmético 37
2.2.14. Algoritmo 38
2.2.15. Resolución de problemas 39
2.2.16. Fases para resolver un problema aritmético 39
2.2.17. Estrategias en la resolución de problemas aritméticos 41
2.3. Definición de términos 42
CAPITULO III: METODOLOGÍA
3.1. Tipo de investigación 51
3.2. Métodos de investigación 51
3.3. Diseño de investigación 52
3.4. Población y muestra de estudio 53
3.5. Técnicas e instrumentos de recolección de datos 54
3.5.1. Descripción de las técnicas e instrumentos 54
3.5.2. Recolección de datos 55
3.6. Técnicas de procesamiento de datos 55
3.6.1. Procesamiento manual 55

3.6.2. Procesamiento electrónico 55
3.6.3. Técnicas estadísticas 55
3.7. Sistema de hipótesis y variables de investigación 56
3.7.1. Hipótesis general 56
3.7.2. Hipótesis específicas 56
3.7.3. Sistema de variables 56
3.7.4. Definición conceptual 57
3.7.5. Definición operacional 58
CAPITULO IV: MARCO PRÁCTICO
4.1. Tratamiento estadístico e interpretación de datos 60
4.1.1. Cronograma de sesiones 61
4.1.2. Presentación de resultados 61
4.1.3. Comparación de las variables 63
4.2. Contrastación de hipótesis 64
Conclusiones 68
Sugerencias 69
Bibliografía 70
Anexo 75
- *Anexo 1: matriz de consistencia*
- *Anexo 2: evaluación de la variable independiente*
- *Anexo 3: evaluación de la variable dependiente*
- *Anexo 4: esquema de sesión de aprendizaje*
- *Anexo 5: promedios de los estudiantes según variable*
- *Evidencias fotográficas*

Introducción

La teoría de los grafos a lo largo de la historia de la humanidad no se ha presentado como una actividad fácil de entender y aprender debido a diferentes factores, lo cual ha provocado que los estudiantes de los diversos niveles educativos la tomen como un obstáculo en su aprendizaje.

Esta preocupación se refleja en los estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de Cerro de Pasco; institución educativa del nivel secundario, que depende administrativa y académicamente de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión en coordinación con la Dirección Regional de Educación Pasco. En tal sentido, esta institución educativa de Nivel Secundario, debe modificar el tratamiento del aprendizaje del área de matemática, razón por la cual esta investigación intitulado *"LA TEORÍA DE GRAFOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS PARA ESTUDIANTES DEL LABORATORIO DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN PEDAGÓGICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DANIEL ALCIDES CARRIÓN DE PASCO - 2014",* se orientó a proponer una modalidad de enseñanza de los grafos en la resolución de problemas aritméticos, que contribuya a resolver ejercicios y problemas. Por cierto, hacer que el proceso de inter aprendizaje de esta área se realice con calidad y que sirva a los intereses de los estudiantes en especial a los de la institución y grado respectivo. Esta inquietud tiene sus bases en la opinión de pedagogos y estudiosos.

Para una mejor comprensión del trabajo lo dividimos en:

Capítulo I: Planteamiento de la investigación, presentando la identificación, determinación y formulación de los problemas, objetivos: general y específicos, justificación de la investigación.

Capítulo II: Presentamos el Marco Teórico, desarrollando los antecedentes de estudio, lo relacionado a las bases teóricas - científica, abordando temas lineales al trabajo propuesto y la definición de términos.

Capítulo III: Desarrollamos la metodología de investigación: tipo – nivel, diseño de investigación; la descripción de la población y muestra sometida a la investigación; técnica e instrumentos empleados para la recolección de datos; y la técnica para el procesamiento y análisis de datos como también; hipótesis: general y específica con las variables del caso.

Capítulo IV: Presentamos los resultados y discusión a través del tratamiento estadístico y la validación de la hipótesis que comprende la presentación de los resultados apoyados en cuadros y gráficos con sus correspondientes explicaciones

Finalmente la conclusión, sugerencia, bibliografía y anexo.

El autor

CAPITULO I

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. Identificación y determinación del problema

En la sociedad de conocimientos, en los albores del siglo XXI, en un mundo con cambios tan vertiginosos, donde las tecnologías y el conocimiento avanzan; las sociedades demandan a las instituciones educativas que preparen a las nuevas generaciones para afrontar estos retos, si las sociedades cambian, las escuelas "fieles reflejos de la sociedad", también deben cambiar. En este sentido, Peter Senge (1990) señaló que las organizaciones deben adaptarse al entorno cambiante que los rodea y esto exige de líderes que motiven y dirijan a las organizaciones y a sus miembros para que estos aprendan a adaptarse a los cambios. Según Peter Drucker asegura que "el recurso real y controlador, y el factor absolutamente decisivo de la producción, ya no es ni el capital, ni la tierra, ni el trabajo, es el conocimiento" Dice en Managing for the Future (1992): "De ahora en adelante la clave es el conocimiento" ante estas circunstancias Martiniano Román (2001) expresa donde la humanidad se mueve dentro de la llamada "sociedad del conocimiento y de la formación de una cultura global" por ende es de interés centrar nuestra mirada en potenciales vigentes e inacabables como son los recursos humanos, rompiendo las barreras de las diferenciaciones sociales, económicas, raciales y de pensamiento entre los diferentes orbes del mundo. Nuestro país no está desvinculado de esta realidad, la que implica una preparación adecuada, suficiente y eficiente de la población en general para afrontar los retos y discrepancias como se menciona en una educación para todos y en todo los niveles.

Compromisos asumidos internacionalmente (Conferencia Mundial sobre la Educación Para Todos, Dakar, Quinta Conferencia Internacional sobre Educación de Adultos de Hamburgo y otros eventos) deben marcar protagonismo para darle importancia a la mejora de la calidad educativa.

En nuestro Sistema Educativo Peruano, pese a los esfuerzos realizados en mejorar la tan voceada calidad educativa en la última década, la realidad es diferente, con una serie de necesidades y problemas de aprendizaje, resultados evaluativos que reflejan el estado real educativo en matemática en sus diferentes niveles; y que esto repercute en el que hacer educativo cotidiano de los maestros y la comunidad integrante en las diferentes áreas de estudio; PISA 2012 se centró en evaluar la capacidad de los estudiantes para formular, emplear e interpretar la Matemática en diversos contextos. Esto incluye razonar matemáticamente y usar conceptos matemáticos, procedimientos, hechos y herramientas para describir, explicar y predecir fenómenos. Se busca que los estudiantes reconozcan el rol que la Matemática juega en el mundo para elaborar juicios fundamentados y tomar decisiones como ciudadanos reflexivos. Desempeño promedio en Matemática según países o territorios participantes en PISA 2012; Perú ocupo el lugar como medida promedio 368 (3,7). Por tal es necesario de realizar trabajos de investigación de propuestas prácticas y de alcance y para la gran mayoría; en ese sentido se formula realizar este trabajo de investigación sobre la teoría de grafos en la resolución de problemas aritméticos para los estudiantes del nivel secundario específicamente en el laboratorio de la UNDAC, para ello me planteo las siguientes interrogantes:

1.2. Formulación del problema

1.2.1. Problema general

¿De qué manera influye la teoría de grafos en la resolución de problemas aritméticos para estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco - 2014?

1.2.2. Problemas específicos

¿Cuáles son los fundamentos teóricos y prácticos de la utilización de la teoría de grafos como recurso didáctico en la resolución de problemas aritméticos, en los estudiantes en tratamiento?

¿Cómo se relaciona la teoría de grafos con la resolución de problemas aritméticos para los estudiantes del caso?

1.3. Formulación de objetivos

1.3.1. Objetivo general

Determinar la influencia de la teoría de grafos en la resolución de problemas aritméticos para estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco - 2014.

1.3.2. Objetivos específicos

Describir los fundamentos teóricos y prácticos de la utilización de la teoría de grafos como recurso didáctico en la resolución de problemas aritméticos, en los estudiantes en tratamiento.

Determinar la relación de la teoría de grafos con la resolución de problemas aritméticos para los estudiantes del caso.

1.4. Importancia y alcances de la investigación

El presente estudio se enmarca en la preocupación social sobre cómo lograr que la educación matemática sea un factor de equidad social. En nuestro país las posibilidades de concreción son aún escasas frente a los enormes déficits sociales y educativos acumulados. Las mayores posibilidades de educabilidad están aún lejos de ser alcanzadas por estudiantes, que viven en ambientes familiares sin estímulo afectivo, lúdico e intelectual y con niveles precarios de calidad de vida. Sólo a través de una política educativa orientada a generar mayor equidad en las oportunidades puede evitar que las reformas educativas refuercen las brechas existentes. No es sólo un asunto de cobertura, se trata de compensar diferencias en aquellos lugares en los que existe debilidad profesional y de gestión para asumir las propuestas.

De allí que el interés se vincule al estudio de la teoría de grafos como prácticas educativas en la resolución de problemas aritméticos, la cual constituye en nuestro medio como el modelo organizativo mayoritario de la educación media a superior. Su origen ha respondido a la falta de recursos y criterios de la interpretación literal de esta teoría, más que a un criterio pedagógico. En su mayoría, tal como vienen interpretando son evaluadas como "*un modelo de educación tradicional para el futuro ser*", sin embargo existen razones para afirmar que la relación teoría – practica sería posible ofrecer una educación matemática de mejor calidad, en la institución programada y los estudiantes en tratamiento para luego de ello compartir esta experiencia en los ámbitos jurisdiccionales pertinentes.

CAPITULO II

MARCO TEORICO

2.1. Antecedentes de estudio

A nivel internacional

Tesis presentado por; SOSA, Nora Mabel - SUREDA, Silvia Cristina, ***"APLICACIÓN DE PROCEDIMIENTOS HEURÍSTICAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ESTADÍSTICOS"*****; Informe de la FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS. UNIVERSIDAD NACIONAL DE MISIONES. CATEDRA DE ESTADISTICA I"**;

Señala que: **La Heurística** es considerada la ciencia de las regularidades y métodos del descubrimiento y la invención. Mediante el empleo de la enseñanza heurística en la matemática se contribuye a lograr la tan buscada independencia cognitiva de los estudiantes y la integración de nuevos conocimientos con los preexistentes. Los procedimientos heurísticas se clasifican en:

1) Principios Heurísticas: ofrecen una sugerencia para encontrar la idea principal de la solución
    a) Generales como la analogía y la reducción.

b) Especiales como la inducción incompleta, movilidad, casos especiales y casos limite.

2) Reglas Heurísticas: Tienen un papel semejante a las preguntas de estímulo de Polya, tienen un carácter orientativo.

a) Con texto
b) Deducción de teoremas
c) Demostración de teoremas

3) Estrategias Heurísticas: o estrategias de búsqueda son aplicables en problemas para los cuales no se conoce un procedimiento algorítmico.

a) Generales: como el método sintético y el análisis creciente.
b) Especiales: como el esquema de Descartes y el Método de los lugares geométricos.

Pizano Chávez, Guillermina. (2004); *Las estrategias de aprendizaje un avance para lograr el adecuado procesamiento de la información*; en este estudio realizado, logró adaptar y validar un instrumento de evaluación de las estrategias del aprendizaje de gran valor académico y científico como es el ACRA (adquisición, codificación, recuperación y apoyo), comprobar que las estrategias de *aprendizaje i*nfluyen sobre el rendimiento académico en un 95% y 99% en los dos grupos de estudiantes del tercer ciclo de estudios universitarios: son entonces relevantes estas estrategias como actividad constructiva en la que el sujeto elabora su propia representación mental, tomando conciencia de su realidad académica. Se demostró, asimismo, que existe una relación estadísticamente significativa entre estrategias de aprendizaje y rendimiento académico, considerando al alumno como agente activo y responsable de la calidad y profundidad de los aprendizajes realizados.

A nivel nacional

“Influencia de las Estrategias Metodológicas de Enseñanza y las Técnicas de Estudio utilizados por los alumnos, en el rendimiento

académico de curso básico en estudiantes de la U.N.A. – Puno”. Tesis para optar el grado académico de Magíster en Ciencias de la Educación en la UNE., presentado por Hugo Condori Mamani.

Esta tesis explica cómo influyen las estrategias metodológicas de enseñanza de los profesores y las técnicas de estudio que utilizan los alumnos, en el rendimiento académico de curso básico en la Universidad Nacional del Altiplano de Puno.

Para comprobar la hipótesis planteada, se utilizó la prueba estadística Ji cuadrada de independencia, la que permitió llegar a las siguientes conclusiones:

El promedio de rendimiento académico de los alumnos en el curso básico es de 8,3 puntos, lo cual es desaprobatorio en el sistema vigesimal de evaluación. Los resultados del rendimiento académico son heterogéneos, ya que el coeficiente de variabilidad es de 48,2%.

Las estrategias metodológicas de enseñanza influyen en menor medida que las técnicas de estudio que utilizan los alumnos, en el rendimiento académico del curso básico, pues así lo confirman los valores calculados de Ji de independencia.

“Método de aprendizaje basado en problemas y su influencia en el rendimiento académico de los alumnos de la asignatura de física de la especialidad de matemática física de la UNDAC”. Tesis presentado por Napoleón GUEVARA VASQUEZ, para optar el grado de magister, Cerro de Pasco – Perú – 2007; llegando a las siguientes conclusiones:

1. La aplicación del método de aprendizaje basado en problemas y su influencia en el rendimiento académico de los alumnos en la asignatura de física de la especialidad de matemática – física, tal como lo muestran los diferentes estadísticos expuestos en el presente trabajo y la contrastación de la hipótesis de investigación.
2. El aprender mediante el método de aprendizaje basado en problemas, permitió que la actitud de los estudiantes en mayor porcentaje sea favorable y muy

Favorable, lo que nos demuestra que el método empleado si cambia la actitud de los estudiantes.

3. Aplicando método de aprendizaje basado en problemas el estudiante desarrollo las habilidades en el armado y manipulación de los equipos, destrezas en el momento de tomar los datos, limpieza y orden en la presentación de los equipos destreza en el momento de tomar los datos, limpieza y orden en la presentación de sus informes de la práctica realizada y el tiempo establecido, su ortografía referencias actualizadas, como se observa en el test de Likert donde el mayor porcentaje de alumnos son hábiles y muy hábiles
4. Este trabajo no pretende realizar un estudio profundo del aprendizaje basado en problemas sino es una invitación a los docentes a explorar las dimensiones de esta técnica de aprendizaje.

“Modelo de resolución de problemas y rendimiento académico en matemática y lógica de los alumnos de la facultad de ciencias de la educación y comunicación social de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión – Pasco”. *Tesis* presentada por Armando Isaías CARHUACHIN MARCELO; para optar el grado de maestro en Educación matemática, cerro de Pasco, 2009; llegando a las siguientes conclusiones:

El presente trabajo presenta un aporte basado en la aplicación del modelo de resolución de problemas (MRP) y el rendimiento académico (RA) de estudiantes universitarios en la asignatura de Matemática y lógica (AML). Tiene que ver con los efectos que produce en el RA de los estudiantes el empleo del MRP. Este trabajo es producto de haber revisado una diversidad de aportes en el plano del modelo de resolución de problemas como: George Polya, Miguel de Guzmán, Eduardo Mancera, Armando Zenteno Ruiz, entre otros respecto a (MRP) y George Boole, Jesús Mosterín, Luis Piscoya, entre otros en cuanto se refiere a la Matemática y lógica.

Los trabajos de investigación antes descritos me han permitido hacer el aporte que reflejo en el presente trabajo, cuyos aportes teóricos y metodológicos de cada uno de ellos me han permitido presentar una propuesta diferente centrado en el modelo de la resolución de problemas, el mismo que me sirvió para desarrollar los contenidos de la asignatura de lógica matemática, válida para los alumnos universitarios que inician su carrera universitaria, especialmente en la Facultad de Educación de la Universidad nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco.

Mientras que tradicionalmente se exponía la información y posteriormente se buscaba su aplicación en la solución de un problema, el nuevo paradigma se presenta el problema, se identifican las necesidades de aprendizaje, se busca la información necesaria y finalmente se regresa al problema, es decir, se hace uso de estrategias cognitivas para mejorar los procesos, modos y formas de actuar inteligentemente frente a la realidad.

La participación del estudiante universitario es activa desde el planteamiento del problema hasta su solución; en esta experiencia de aprendizaje se integran en pequeños grupos, aportan, comparten experiencias y desarrollan capacidades específicas como la observación, la discriminación, y la reflexión sobre conocimientos, procesos, actitudes y valores.

El docente universitario mediador ,Selecciona ,organiza ,crea y presenta las situaciones que provoca la mejora de los procesos cognitivos y más que enseñar técnicas , el docente crea situaciones de aprendizaje al estudiante par que descubra estos procesos.

“Aplicación de nuevas estrategias metodológicas como recurso didáctico para mejorar el rendimiento académico de los alumnos en la facultad de educación de la UNDAC 2007”. Tesis presentado por Víctor, TORRES SALCEDO; Cerro de Pasco 2009, con la mención: docencia en el nivel superior; llegando a las siguientes conclusiones:

- La “aplicación de nuevas estrategias metodológicas como recurso didáctico”, mejora relevantemente el proceso de enseñanza aprendizaje en los alumnos de la universidad nacional Daniel Alcides Carrión.

- El sistema educativo tiene que replantear el concepto de la relación alumno - profesor y el proceso mismo de aprendizaje. Asimismo, los contenidos curriculares, además, revisar críticamente los modelos mentales que han inspirado el desarrollo de los sistemas educativos. Desde la educación infantil hasta la educación para la tercera edad.
- En los últimos años se han propuesto varios modelos educativos destinados a cambiar la mentalidad de los alumnos y maestros basados en el enfoque constructivista y la era de la informática. Estos paradigmas se vislumbran en fuertes contradicciones, como: didáctico, pedagógico, medios y materiales educativos, educación virtual, educación a distancia, internet, página web, etc. Estos dilemas de nuevos paradigmas, supone tomar decisiones consientes para lograr los objetivos perseguidos.
- Los patrones o modelos educativos modificaron los aspectos educativos en función al avance de la ciencia y la técnica, dando lugar a nuevos comportamientos y valores educativos de los estudiantes y profesores, como: problemas psicológicos, problemas de cognición, problemas pedagógicos, problemas didácticos, medios y materiales educativos, problemas curriculares; confundiendo y desubicando al magisterio con los distintos procesos educativos para la aplicación del proceso de enseñanza y aprendizaje, como también a los jóvenes estudiantes la despersonalizaron su ser social, deformando y destruyendo por completo su formación y desarrollo personal.
- En definitiva, estamos ante un problema eminentemente pedagógico. La tecnología es un medio y no el fin, no podemos ignorar que el uso de ella puede incrementar la cobertura y la calidad de los servicios educativos.

A nivel local

Trabajo de investigación titulado ***"Estrategias Didácticas para el Aprendizaje de Contenidos Educativos en Educación Secundaria de Menores",*** para optar la Licenciatura en Educación Secundaria, presentado por los bachilleres: AYRA PICOY, Teodoro y SANTOS GIRÓN, Nelly Chela, el año 2002, quienes llegaron a las conclusiones siguientes:

La Educación Secundaria que actualmente debe desarrollarse en nuestro país son los cuatro pilares de la educación mundial como: Aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a convivir y aprender a ser.

Las estrategias didácticas más adecuadas acordes con la educación mundial están agrupadas en: Estrategia para aumentar la autonomía del alumno, para aumentar la capacidad del alumno, para profundizar las relaciones grupales, para aumentar la autoestima del alumno y para estimular la participación y el placer de aprender.

Cada estrategia seleccionada tiene que ser desarrollada por los alumnos, con la ayuda del profesor, teniendo en cuenta que el valor supremo de la educación es la libertad, que debe ser expresado en lo útil que debe ser el alumno, plasmado en el trabajo con creatividad y criticidad.

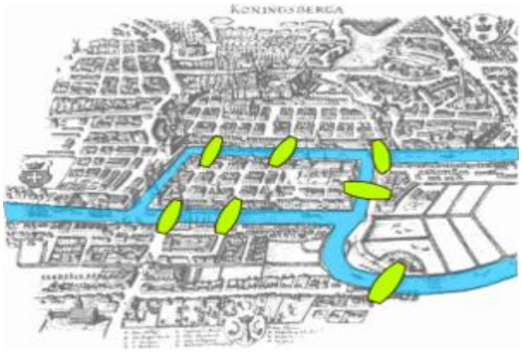
2.2. Bases teórico científicos

2.2.1. Los grafos**:** En una red de comunicación, no es necesario que toda estación pueda comunicarse directamente con otra, puesto que las estaciones pueden actuar de posta para un mensaje entre otras dos estaciones. Si una estación, o una línea de datos, deja de funcionar, queremos saber si la red queda conexa, es decir, si todas las estaciones que siguen funcionando pueden comunicarse entre sí. Para preguntas como ésta, no nos interesa la ubicación física de las estaciones, sino sólo su conectividad, y es así que surge la noción matemática de grafo, que es simplemente unos nodos con algunas conexiones que se llaman aristas. Una arista puede conectar dos nodos, o, como en algunas aplicaciones, un nodo consigo mismo. Una arista está anclada en sus dos extremos a nodos, o posiblemente al mismo nodo en los dos extremos formalmente; como un ejemplo, hemos considerado los árboles como una generalización del concepto de lista porque permiten que un elemento tenga más de un sucesor. Los grafos aparecen como una extensión del concepto de árbol, ya que en este nuevo tipo de estructuras cada elemento puede tener, además de más de un sucesor, varios elementos predecesores.

Esta propiedad hace a los grafos las estructuras más adecuadas para representar situaciones donde la relación entre los elementos es completamente arbitraria, como pueden ser mapas de carreteras, sistemas de telecomunicaciones, circuitos impresos o redes de ordenadores. Aunque hay estructuras más complejas que los grafos, no las veremos en este curso.
Los grafos se pueden clasificar en diferentes tipos dependiendo de cómo se defina la relación entre los elementos: podemos encontrar grafos dirigidos o no dirigidos y etiquetados o no etiquetados. También se pueden combinar ambas categorías.

2.2.2. **Leonhard Euler y la teoría de grafos:** Esta abstracción del problema ideada por Euler dio pie a la primera noción de grafo, que es un tipo de estructura de datos utilizada ampliamente en matemática discreta y en ciencias de la computación. A los puntos se les llaman vértices y a las líneas aristas. Al número de aristas incidentes a un vértice se le llama el grado de dicho vértice. Específicamente, un diagrama como el de la abstracción del mapa de Königsberg representa un multígrafo no dirigido sin bucles.
En la teoría de grafos, existe un concepto llamado ciclo Euleriano, llamado así justamente en honor a Leonhard Euler, que representa cualquier camino dentro de un grafo particular, capaz de recorrer todas las aristas una única vez, regresando finalmente al mismo vértice original. En coloración de grafos, una subárea de la teoría de grafos, la resolución de este problema constituye además el primer teorema de los grafos planares.

El **problema de los puentes de Königsberg**, también llamado más específicamente **problema de los siete puentes de Königsberg**, es un célebre problema matemático, resuelto por Leonhard Euler en 1736 y cuya resolución dio origen a la teoría de grafos. Su nombre se debe a *Königsberg*, el antiguo nombre que recibía la ciudad rusa de Kaliningrado, que durante el siglo XVIII formaba parte de Prusia Oriental, como uno de los ducados del Reino de Prusia.

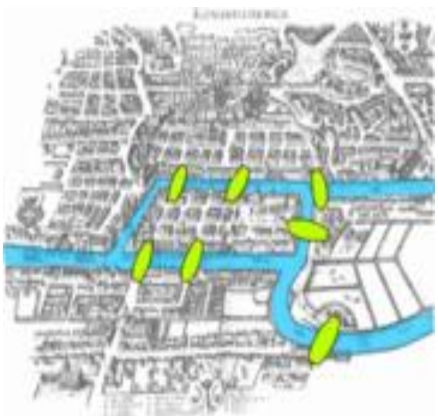


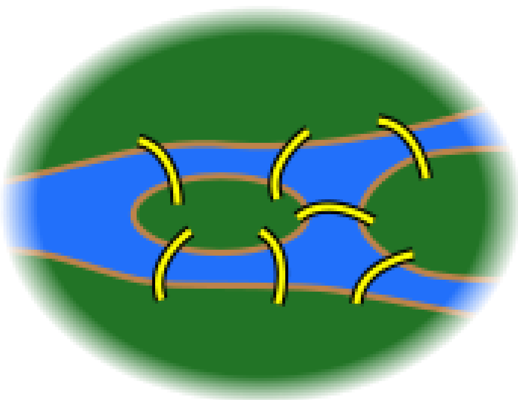
Mapa de Königsberg en la época de Leonhard Euler, que muestra dónde se encontraban los siete puentes (en verde claro) y las ramas del río (en celeste).

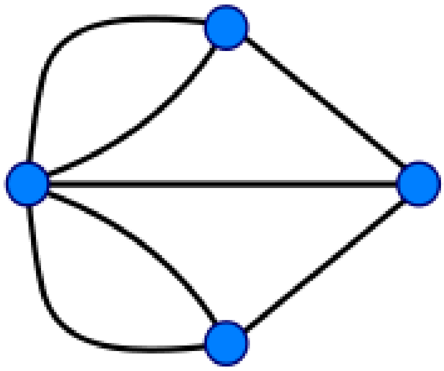
El problema fue formulado en el siglo XVIII y consistía en encontrar un recorrido para cruzar a pie toda la ciudad, pasando sólo una vez por cada uno de los puentes, y regresando al mismo punto de inicio.

El problema, formulado originalmente de manera informal, consistía en responder a la siguiente pregunta:

Dado el mapa de Königsberg, con el río Pregolya dividiendo el plano en cuatro regiones distintas, que están unidas a través de los siete puentes, ¿es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, de modo de recorrerlas todas pasando sólo una vez por cada puente, y regresando al mismo punto de origen?







La respuesta es negativa, es decir, no existe una ruta con estas características. El problema puede resolverse aplicando un método de fuerza bruta, lo que implica probar todos los posibles recorridos existentes. Sin embargo, Euler en 1736 en su publicación *«Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis»* demuestra una solución generalizada del problema, que puede aplicarse a cualquier territorio en que ciertos accesos estén restringidos a ciertas conexiones, tales como los puentes de Königsberg.

Para dicha demostración, Euler recurre a una abstracción del mapa, enfocándose exclusivamente en las regiones terrestres y las conexiones entre ellas. Cada puente lo representó mediante una línea que unía a dos puntos, cada uno de los cuales representaba una región diferente. Así el problema se reduce a decidir si existe o no un camino que comience por uno de los puntos azules, transite por todas las líneas una única vez, y regrese al mismo punto de partida.

Euler determinó, en el contexto del problema, que los puntos intermedios de un recorrido posible necesariamente han de estar conectados a un número par de líneas. En efecto, si llegamos a un punto desde alguna línea, entonces el único modo de salir de ese punto es por una línea diferente. Esto significa que tanto el punto inicial como el final serían los únicos que podrían estar conectados con un número impar de líneas. Sin embargo, el requisito adicional del problema dice que el punto inicial debe ser igual al final, por lo que no podría existir más de un único punto conectado con un número impar de líneas.

En particular, como en este diagrama los cuatro puntos poseen un número impar de líneas incidentes (tres de ellos inciden en tres líneas, y el restante incide en cinco), entonces se concluye que es imposible definir un camino con las características buscadas.

Puente de la Miel sobre el río Pregolya en Kaliningrado.

Leonhard Euler llegó a Prusia en 1741, a la edad de 34 años, donde vivió hasta 1766 para luego regresar a San Petersburgo. Durante esos años trabajó en la Academia Prusiana de las Ciencias, en donde desarrolló una prolífera carrera como investigador. Euler fue contemporáneo a varios otros famosos matemáticos y pensadores procedentes de aquella ciudad, tales como Immanuel Kant, Johann Georg Hamann y Christian Goldbach, por lo que Königsberg fue en ese tiempo un importante epicentro científico.

Es en este ambiente y por estos años en que surge la formulación del problema de los puentes de Königsberg, propagándose a modo de juego y de trivia matemática entre los intelectuales de la época.

Leonhard Euler (1707 - 1783), famoso Matemático que resolvió el problema en 1736, dando origen a la teoría de grafos. Retrato de 1753.

2.2.3. Conceptos previos y terminología: Formalmente, un grafo G consiste en dos conjuntos finitos N y A. N es el conjunto de elementos del grafo, también denominados vértices o nodos. A es el conjunto de arcos, que son las conexiones que se encargan de relacionar los nodos para formar el grafo. Los arcos también son llamados aristas o líneas.

Los nodos suelen usarse para representar objetos y los arcos para representar la relación entre ellos. Por ejemplo, los nodos pueden representar ciudades y los arcos la existencia de carreteras que las comunican.

Cada arco queda definido por un par de elementos n_1, $n_2 \in N$ a los que conecta. Aunque habitualmente los elementos son distintos, permitiremos que sean el mismo nodo ($n_1 = n_2$). Representaremos gráficamente un arco como una línea que une los dos nodos asociados.

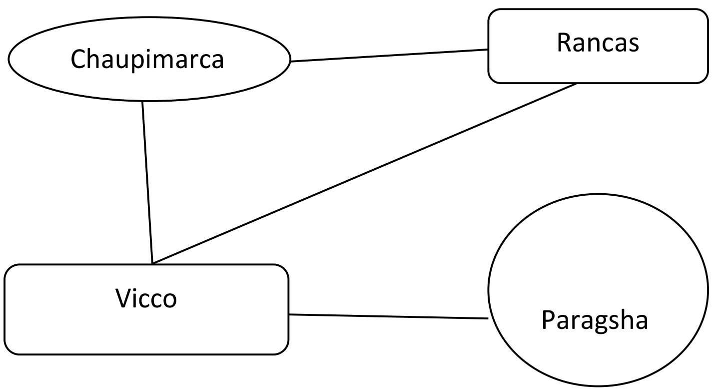


Figura: Grafo representativo de la conexión aérea de ciudades.

Si queremos representar mediante un grafo la red vehicular de una empresa de transportes entre diferentes ciudades, tendríamos el siguiente grafo *G* = {*N*, *A*}; *N* = {Chaupimarca, Rancas, Vicco, Paragsha};

A = {(Chaupimarca, Vicco), (Chaupimarca, Rancas, Vicco), (Vicco, Paragsha), (Chaupimarca, Rancas)}.

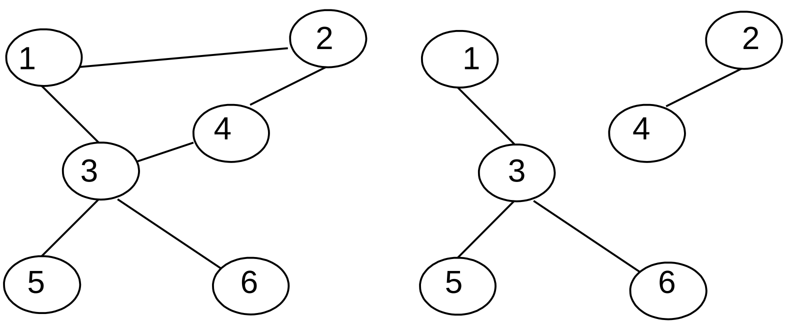
Se dice que dos nodos son *adyacentes* o *vecinos* si hay un arco que los conecta. Los nodos adyacentes son representados por pares (a, b).

Un *camino* es una secuencia de nodos $n_1, n_2, ..., n_m$ tal que $\forall i, 1 \leq i \leq (m-1)$, cada par de nodos (n_i, n_{i+1}) son adyacentes. Se dice que un camino es *simple* si cada uno de sus nodos, excepto tal vez el primero y el último, aparece sólo una vez en la secuencia.

Un *ciclo* es un camino simple en el que el primer y último nodos son el mismo ($n_1 = n_m$). Si un camino desde un nodo a él mismo no contiene otros nodos entonces decimos que es un *ciclo degenerado*.

Un grafo sin ciclos se dice acíclico.

Si en un grafo G = {N,A}, N está formado por dos o más subconjuntos disjuntos de nodos (no hay arcos que conecten nodos de un subconjunto con nodos de otro subconjunto) entonces se dice que el grafo es desconectado o inconexo, en otro caso se dice que es conectado o conexo.



(a) **(b)**

Figura: Grafos (a) conexo e (b) inconexo

2.2.4. Subgrafos: Sea *G* = (*N*, *A*) un grafo con un conjunto de nodos *N* y un conjunto de arcos *A*. Un subgrafo de *G* es un grafo *G'* = (*N'*, *A'*) tal que:

1. *N'* es un subconjunto de *N*.
2. Todos los elementos que aparecen en arcos de *A'* pertenecen a *N'*. Si, además, *A'* consta de todos los arcos (*n*, *m*) de *A*, tal que *n* y *m* están en *N'*, entonces *G'* es un *subgrafo inducido* de *G*.

2.2.5. Ejemplos de problemas en la teoría de grafos:

a) <u>El ciclo euleriano</u>

La ciudad de Königsberg está atravesada por un rio que tiene 2 islas y 7 puentes como muestra la figura 1. Se pregunta si es posible partir del sector A y, haciendo una caminata, pasar por cada puente una sola vez volviendo al punto de partida. En el grafo de la figura 2 el problema se traduce en partir de A y recorrer las 7 ramas sin repartir ninguna y volver a A (**ciclo euleriano**). Este problema fue encarado por Euler en 1736 y es el origen de la teoría de grafos.

Figura 1

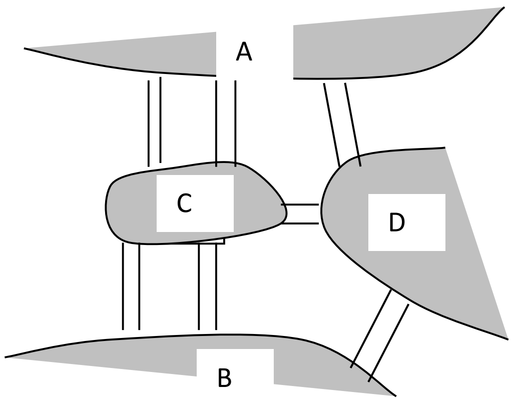
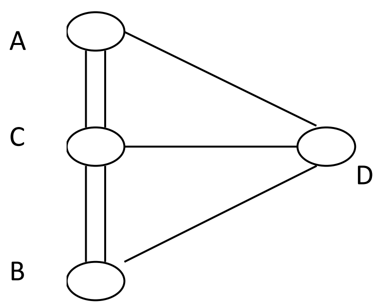


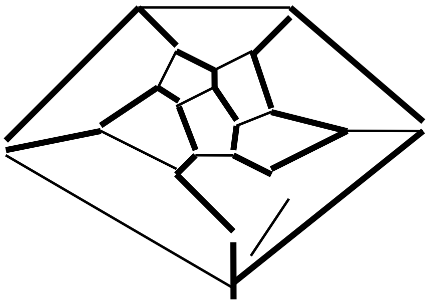
Figura 2



b) <u>El ciclo hamiltoniano</u>.

A un dodecaedro, cuerpo solido regular con doce caras pentagonales, se la ha quitado una cara y se lo ha aplastado en el plano como muestra la figura 3

Figura 3



Imaginemos a los vértices de esta figura como ciudades y a las aristas como tramos de caminos entre dos ciudades. Se pregunta si hay un camino formado de tramos que partiendo de una ciudad visite todas las ciudades una sola vez volviendo a la ciudad de partida (**ciclo hamiltoniano**)

c) <u>Coloreado de mapas</u>

La figura 4 muestra un mapa con 4 districtos A, B, C y D. Se trata de pintar cada districto con un color de forma que dos regiones con un borde común (que no sea un punto) tengan distintos colores y queremos hacer esto usando un mínimo número de colores. La figura 5 muestra un grafo homeomorfo al mapa, en el sentido que los vértices del grafo se corresponden con las regiones del mapa y dos vértices están conectados por una rama cuando las regiones correspondientes tienen un borde común. El problema se traduce en el grafo a minimizar el número de colores al asignar un color a cada vértice de forma que cualquier rama tenga extremos de distinto color.

Figura 4

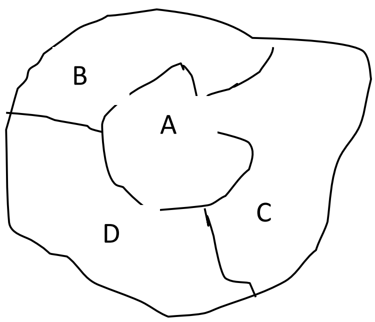
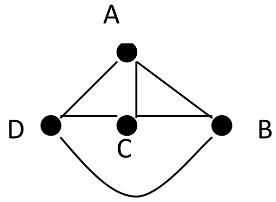


figura 5



d) <u>El recorrido del cartero</u>

Imaginemos un grafo que representa el mapa de las calles de un barrio. Una calle va de una esquina a la otra. En una esquina está ubicada una oficina de correos. Un cartero sale de la oficina de correos y tiene que recorrer todas las calles y volver a la oficina. Se plantea el problema de un recorrido que minimice el número de calles. Que está obligado a recorrer más de una vez.

e) <u>El problema del caballo en el juego de ajedrez</u>

Consideremos un tablero de ajedrez. Y un caballo. Se pregunta si es posible que el caballo parta de un casillero y visite todos los otros 63 casilleros una solo vez volviendo al punto inicial. (Ciclo hamiltoniano)

f) <u>El problema de cruzar el rio</u>

Tenemos 3 misioneros y 3 caníbales y un bote para cruzar el rio. El bote tiene capacidad para 2 personas a lo sumo. Se trata que los 6 individuos crucen el rio de forma que en ningún momento haya más caníbales que misioneros en cualquiera de los dos márgenes del rio. Indiquemos con (i,j) el hecho que haya i misioneros y j caníbales en un dado margen. Entonces $(i,j) \rightarrow (i-1, j-1)$ significa una posible transición, es decir, cruzan el rio un misionero y un caníbal. A continuación $(i-1, j-1) \rightarrow (i, j-1)$ significa que volvió el misionero solo. Imaginemos que dibujamos todos los pares (i,j) como puntos en el plano ($i \geq j$) y unimos por flechas los pares que representan transiciones posibles. Se trata de hallar una sucesión de flechas consecutivas que parta de (3,3) y termine en (0,0).

2.2.6. Multígrafo: Sea E = {a,b,c,...} un cito de elementos que llamamos ramas y V= {A,B,C,...} un cito de elementos que llamamos vértices. Una asignación de cada rama a un par de vértices lo llamamos un multígrafo. Por ejemplo, la figura 2 muestra un **multigrafo**

E= { a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , a_6 , a_7 } (los puentes)

V= { A , B , C , D } (los districtos)

$a_1 \rightarrow (A,B)$ $\quad$ $a_5 \rightarrow (A,D)$

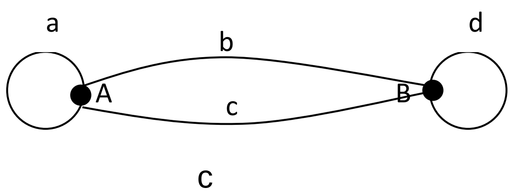
$a_2 \rightarrow (A,B)$ $\quad$ $a_6 \rightarrow (B,D)$

$a_3 \rightarrow (B,C)$ $a_7 \rightarrow (C,D)$

$a_4 \rightarrow (B,C)$

Un **camino** es una sucesión alternada de vértices y ramas u_1, e_1, u_2, e_2, u_3, ..., u_n, e_n, e_{n+1} tales que $e_i=(u_i, u_{i+1})$ y $ei \neq ei+1$ ($1 \leq i \leq n$)

Figura 6



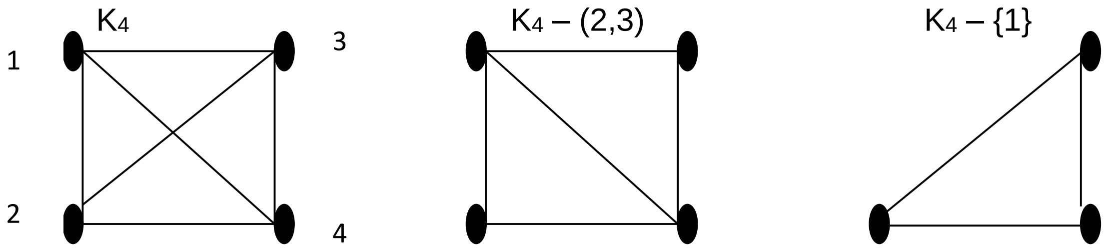
La figura muestra un grafo con dos vertices A y B y 4 ramas a, b , c y d (a y d son rulos) Un posible **camino** es AaAbBdB que une A y B. .Un camino se dice **cerrado o ciclo** si el vertice inicial coincide con el final, por ejemplo, AcBbA. Un camino se dice **euleriano** si pasa por todos las ramas una y sola una vez, por ejemplo, AaAbBdBcA es un ciclo euleriano. Un multígrafo se dice **conexo** si para todo par de vértices existe un camino que los une. El **grado** de un vértice es el número de ramas que inciden sobre él. En el multígrafo de figura 6 A y B tienen grado 4.

Teorema (Euler): Un multígrafo conexo tiene un ciclo euleriano si todos sus vértices tienen grado par.

2.2.7. Grafo (simple): Un grafo es un multigrafo que tiene a lo sumo una rama entre dos vértices y no tiene rulos. Los conceptos de camino, ciclo, euleriano, conexo y grado coinciden con los más arriba definidos. Además decimos que un camino o ciclo es **hamiltoniano** si pasa por todos los vértices una y solo una vez. Si un par de puntos tiene una rama que los une decimos que son **adyacentes**,

Un grafo **G** lo representamos mediante **(V,E)** donde **V** es el conjunto de vértices y **E**$\subset$VxV es el cito de ramas. Si un grafo tiene $|V|$=n vértices el máximo número de ramas es $|E| \leq \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Así, un grafo con 4 vértices tiene a la sumo 6 ramas. Al grafo que tiene 4 vértices y 6 ramas lo designamos con K_4. La figura 7 muestra una representación de K_4 (izquierda)

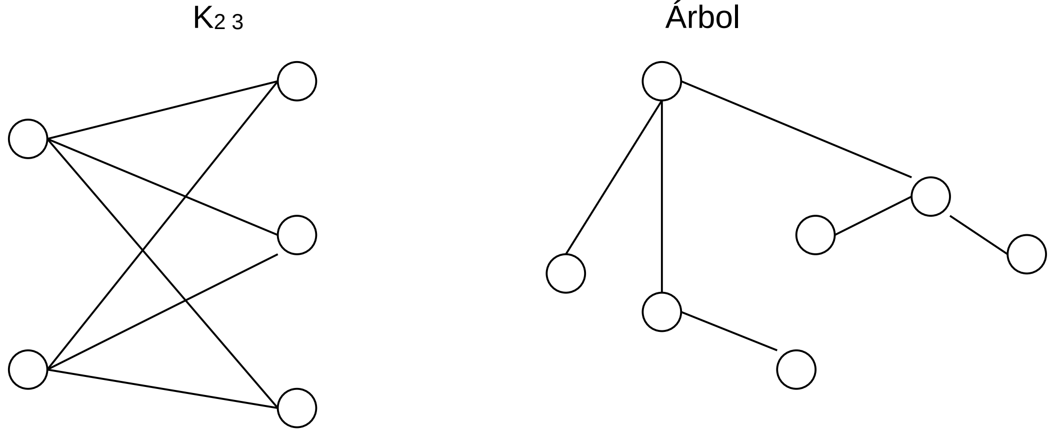
Figura 7



2.2.8. Un subgrafo se obtiene de un grafo restándole parte de sus elementos. Por ejemplo si a K_4 le restamos la rama (2,3) obtenemos el subgrafo del medio de la figura 7 y si le restamos el vértice 1 resulta el subgrafo de la derecha

Un **grafo es bipartito** si V está dividido en 2 partes no vacías U y W y $E \subset UxW$. Si $m=|U|$ y $n=|W|$ entonces el máximo número de ramas es mxn. Si tiene mxn ramas entonces el grafo bipartito se dice completo y se escribe $K_{m\,n}$. En la figura 8 (izquierda) representamos $K_{2\,3}$

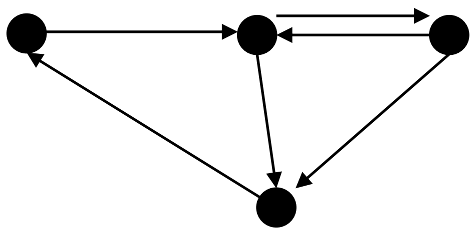
Figura 8



Un **árbol** es un grafo conexo que no tiene ciclos. También se puede caracterizar un árbol diciendo que desde cualquier vértice hay un solo camino para llegar a otro vértice. Un árbol es un grafo bipartito conexo.

2.2.9. Grafo dirigido o dígrafo: Es un conjunto de **vértices** también llamados **nodos** V y un subconjunto E de pares de vértices de V llamados **arcos** donde el par se considerada dirigido, es decir, si $A\in V$ y $B\in V$ entonces (A,B) y (B,A) son arcos distintos. Si (A,B) es un arco entonces llamamos a A la **cola** y a B la **punta** de (A,B), Si $|V| = n$ entonces el máximo número de arcos que el dígrafo puede tener es n(n-1). Un **camino dirigido** en un grafo G dirigido es una sucesión de vértices tal que si x_n y x_{n+1} son dos vértices sucesivos entonces (x_n , x_{n+1}) es arco del grafo. Un **camino** es una sucesión de vértices tal que si x_n y x_{n+1} son vértices sucesivos entonces (x_n , x_{n+1}) o (x_{n+1} , x_n) pertenece a E. Un dígrafo es **fuertemente conexo** si cualquier par de vértices se puede unir por un camino dirigido

Figura 9: Un dígrafo fuertemente conexo



Observación: Hemos hablado de multígrafos, grafos simples y dígrafos. Cuando digamos grafo a secas significa que nos referimos a un grafo simple.

2.2.10. Demostración de algunos teoremas:

Teorema (Euler, 1736): Un multígrafo conexo G tiene un ciclo euleriano si sus vértices tienen grado par.

Demostración

La condición que los vértices sean pares es necesaria.

En efecto, imaginemos que existe un camino euleriano C y una rama cualquiera v que incide en un vértice A entonces tiene que haber otra rama w incidente en A que continua el camino. Esto muestra que el grado de A es mayor o igual que 2. Si hubiera otra rama x de C que incide en A debe existir otra rama z incidente en A, etc.

La condición es suficiente.

Bosquejamos la idea de la demostración con un ejemplo. Sea el grafo de la figura 10. Partiendo de a dibujamos un ciclo C_1 como en la figura 10 a. En este ciclo buscamos un vértice con ramas incidentes no usadas como b en fig. 10 b y dibujamos un ciclo C_2 partiendo de b. Ahora buscamos un vértice c este ciclo C_2 con ramas incidentes no usadas. Partiendo de c dibujamos un tercer ciclo C_3 como en la figura 10 c.

Figura 10

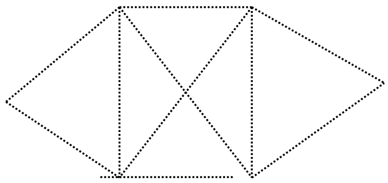


Figura 10a

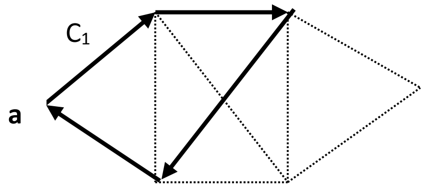


Figura 10b

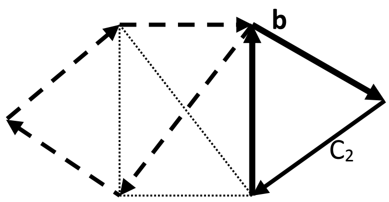
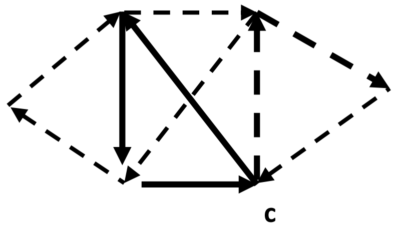


Figura 10c



Ahora dibujamos un ciclo euleriano de la siguiente manera. Partiendo de a comenzamos a trazar C_1 hasta llegar a b. A continuación, empezamos a trazar C_2 hasta llegar a c. A continuación trazamos C_3 hasta retornar c. Desde c vamos a b completando C_2. Desde b vamos a a completando C_1.▼

Teorema: Sea G = (V,E) un grafo. Entonces $\sum_{v \in V} \text{grado}(v) = 2|E|$

Demostración

Por inducción. Sobre el número de ramas. Si (1) es cierto suprimiendo una rama de G. digamos la rama (x,y) entonces al agregar esa rama el grado de x e y aumentan en 1.

Y el segundo miembro de (1) aumenta en 2. Por otra parte si el grafo tiene una sola rama el teorema es obvio.▼.

Corolario: El número de vértices impares de un grafo es par.

Demostración

Sea P el cito de vértices pares e I el de vértices impares. Tenemos

$$\sum_{v \in P} \mathrm{grado}(v) + \sum_{v \in I} \mathrm{grado}(v) = 2|E|$$

La para suma es par y el segundo miembro es par por tanto la segunda suma es par▼

Teorema: En un grafo hay dos vértices que tienen el mismo grado.

Demostración

Sea n el número de vértices. El grado (v) puede ser 0 o a lo sumo n-1. Si hay dos o más vértices de grado 0 entonces el teorema es cierto. Por lo tanto consideremos 2 casos 1) no hay ningún vértice de grado 0. Como los n vértices tienen posibles grados1,2,...,n-1 por el principio de los casilleros hay dos vértices con el mismo grado 2) Hay un solo vértice de grado 0. Entonces los n-1 vértices restantes tienen posibles grados 1,2,...,n-2. Concluimos que el teorema es cierto también en este caso.▼

Teorema: Sea G conexo. G es bipartito si todos sus ciclos tienen un numero par de ramas

Demostración

Ejercicio.▼

Corolario: El teorema es cierto aunque G no sea conexo. Basta considerar el teorema aplicado a cada "componente conexa" de G,

Observación

Recordamos que en un grafo un camino cerrado (ciclo) que pasa por todo vértice una y solo una vez se llama **ciclo hamiltoniano**. Mientras que para un ciclo euleriano existe una simple condición necesaria y suficiente para que exista un ciclo euleriano solo se conocen condiciones suficientes para la existencia de ciclos hamiltonianos. Por ejemplo, K_n tiene un ciclo hamiltoniano. De hecho tiene (n-1)! Ciclos hamiltonianos. Los siguientes 2 teoremas dan condiciones suficientes pero menos exigentes.

Teorema (Redei, 1934**):** Sea G un grafo dirigido tal que si u y v son vértices se tiene que $u \to v$ o bien $v \to u$. Este grafo se llama un torneo (*). En un torneo con n vértices existe un camino hamiltoniano, es decir, existen v_i's tales que $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_n$

Demostración

Por inducción. Supongamos tener el camino $v_1 \to v_2 \to \ldots v_i \to v_{i+1} \to \ldots v_n$. Sea z distinta de esta n vértices. Si para algún i=1,2,...,n-1 se tuviera $v_i \to z \to v_{i+1}$ podemos extender el camino a n+1 vértices. Quedan 2 casos:

1) $v_1 \leftarrow z$ con lo cual podemos extender el camino así $z \to v_1 \to v_2 \to \ldots v_i \to v_{i+1} \to \ldots v_n$

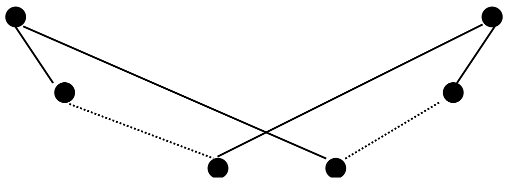
2) $v_1 \to z$, $v_2 \to z, \ldots, v_{n-1} \to z$, $v_n \to z$. Pero $v_n \to z$ permite extender el camino por la derecha.▼

(*) Considere n jugadores de tenis que participan de un torneo. Si u le gana a v escribimos $u \to v$ (no hay empate). El teorema dice que los jugadores pueden ordenarse en una sucesión de forma que para 2 jugadores sucesivos, el primero gana al segundo.

Teorema (Ore, 1960**):** Si en un grafo con n(≥3) vértices se tiene que para todo par u,v de vértices no adyacentes deg u +deg v ≥ n entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.

Demostración

Por contradicción. Supongamos que G no fuera hamiltoniano y satisface deg(x)+deg(y)≥n si x e y no son adyacentes. Podemos agregar más ramas y la condición se satisfacerla a fortiori. Por lo tanto hay un G no halmitoniano tal que si agrego una rama mas es hamiltoniano y que satisface la condición. Sea un tal G. Sea x e y no adyacentes en G. Entonces G+(x,y) es hamiltoniano y, por lo tanto contiene un path hamiltoniano $x=v_1,v_2, \ldots,v_i,v_{i+1}, \ldots,v_{n-1},v_n=y$. Ahora los pares v_1v_{i+1} y v_iv_n no pueden ser ambos adyacentes porque tendríamos un ciclo hamiltoniano en G (ver figura)



Así que debemos tener $a_{1,i+1}+ a_{i,n} \leq 1$ (donde $a_{ij}=1$ si v_i y v_j son adyacentes y 0 si no). Tenemos que deg(x)+deg(y)=

$$\sum_{i=2}^{n-1} a_{1i} + \sum_{i=2}^{n-1} a_{in} = 1 + \sum_{i=3}^{n-1} a_{1i} + \sum_{i=2}^{n-2} a_{in} + 1 = 2 + \sum_{i=2}^{n-2} a_{1i+1} + \sum_{i=2}^{n-2} a_{in} = 2 + \sum_{1=2}^{n-2} a_{1i+1} + a_{in} \leq n-1$$

▼

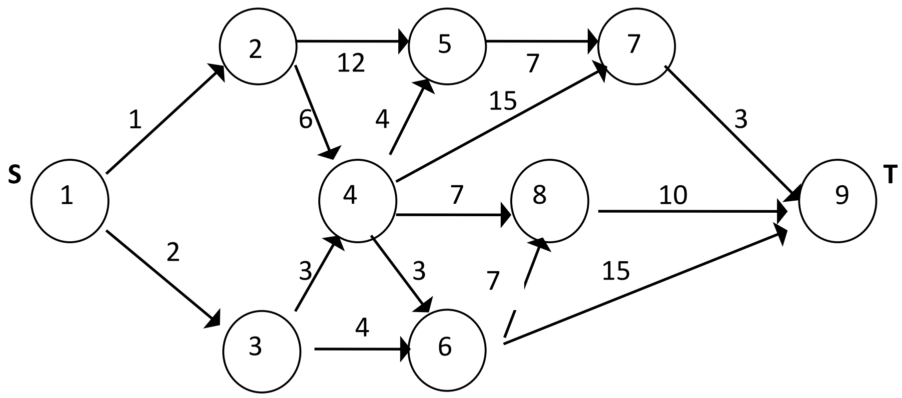
Corolario: Si para todo vértice v en el grafo G con n vértices se tiene grado (v)≥n/2 entonces existe un ciclo hamiltoniano.

2.2.11. Optimización Combinatoria: En los siguientes problemas suponemos tener un grafo G= (V, E) y un número c ® asignado a cada e∈E.; ejemplos:

a) El problema del viajante: Interpretamos cada vértice del grafo completo G como una ciudad y cada rama (u,v) como un tramo de ruta que conecta las ciudades u y v. Interpretamos c(u,v) como la distancia entre u y v. Imaginamos un viajante que parte de una ciudad cualquiera y visita las restantes pasando una vez por cada una y volviendo a la ciudad de partida. Llamemos C al circuito que realiza. El problema consiste en hallar un C tal que la distancia total de los tramos que integran C sea mínima. En otros términos, dado un grafo completo G= (V,E) con una función $c:E \to R$ hallar un ciclo hamiltoniano de mínimo "costo". Observamos que hay (n-1)! Ciclos hamiltonianos $(n=|V|)$. Resolver este problema por enumeración significa generar las (n-1)! Permutaciones y sumar el costo de cada una para elegir la mínima. Esto es imposible para una computadora si n es grande, p. ej., $n \geq 50$. No se conoce ningún "algoritmo eficiente" para resolver este problema. Como ejemplo de un problema practico de este tipo imaginemos n ítems que deben ser procesados en secuencia por una máquina y supongamos que se pierde un tiempo c(i,j) al pasar del ítem i al ítem j. El problema consiste en hallar una permutación de los n ítems que resulte en un tiempo total perdido mínimo.

b) Mínimo costo de un árbol: Sea G_0 un grafo conexo con un costo asignado a sus ramas. Si G_0 tiene algún ciclo le sacamos una rama al ciclo y nos queda otro grafo conexo G_1. Si G_1 tiene un ciclo repetimos la operación y seguimos así hasta tener un grafo conexo T sin ciclos, es decir, un árbol. Se trata de hallar un árbol T de mínimo costo. Podemos interpretar el problema de la siguiente manera. Los vértices son plataformas de bombeo de petróleo en el mar y la rama es una cañería que conecta dos estaciones. Se trata de instalar una red de cañerías que interconecte las estaciones a costo mínimo. Este problema se resuelve eficientemente mediante el algoritmo de Kruskal como veremos más adelante.

c) El camino más corto: Sea G= (V,E) un grafo dirigido con un costo definido en sus arcos. Sean S y T dos nodos de V. El problema consiste en hallar un camino dirigido de s a t de mínimo costo. La figura muestra un ejemplo. En general, mostraremos más adelante que existen algoritmos eficientes para resolver este problema. Este problema sirve como subrutina de muchos algoritmos.



2.2.12. Cálculo: En general, el termino cálculo (del latín calculus = piedra) hace referencia, indistintamente, a la acción o el resultado correspondiente a la acción de calcular. Calcular, por su parte, consiste en realizar las operaciones necesarias para prever el resultado de una acción previamente concebida, o conocer las consecuencias que se pueden derivar de unos datos previamente conocidos. No obstante, el uso más común del término cálculo es el lógico-matemático. Desde esta perspectiva, el cálculo consiste en un procedimiento mecánico, o algoritmo, mediante el cual podemos conocer las consecuencias que se derivan de unos datos previamente conocidos.

Se puede denominar cálculo a todas aquellas operaciones (en su mayoría, matemáticas**)** que tienen por objetivo el alcance de cierto dato o información y que requieren el desarrollo de un proceso previo a la obtención de ese resultado. El cálculo es la acción de calcular y aunque por lo general se lo relaciona con operaciones de tipo matemático y científico, el término también puede ser utilizado para muchas otras acepciones en las cuales las nociones de prever y proyectar están presentes. La acción de calcular puede, entonces, no estar relacionada con la matemática si no con la necesidad de tener en cuenta determinadas variables y proyectar un posible resultado o cálculo en relación con información que las mismas brindan.

El cálculo es, dentro del área de la matemática y de muchas ciencias en general, una de las operaciones básicas y más simples que, dependiendo de las circunstancias o de los elementos a analizar, puede volverse extremadamente compleja. Los cálculos más simples y primordiales son aquellos que tienen que ver con operaciones tales como suma o resta, división o multiplicación de elementos; pero, sin duda alguna, las diversas ciencias ofrecen sistemas de cálculo en base a tales operaciones mucho más complejos y realmente inaccesibles para aquellos que no se especializan en tal actividad.

Independientemente de si es utilizado para aspectos científicos o dentro del común lenguaje de cualquier individuo, la noción de cálculo siempre implica el desarrollo de un procedimiento lógico de razonamiento que permite llegar a la información final a partir del análisis de ciertas variables. Tal es así que un cálculo puede ser la suma de dos o más elementos, cuantitativamente, el cálculo es la respuesta de un individuo ante determinada situación y muchos otros ejemplos no necesariamente relacionados con la ciencia matemática. En este sentido, el cálculo siempre implica entonces una línea de pensamiento más o menos elaborada que será la responsable de la obtención de la información final y que se basa en el estudio y análisis de los datos con los que ya se cuenta de antemano.

2.2.13. Cálculo aritmético: Aritmética es la rama de la matemática que estudia ciertas operaciones de los números y sus propiedades elementales. Proviene del griego *arithmos* y *techne* que quieren decir, respectivamente, números y habilidad. El número en aritmética elemental tiene la consideración de número natural referido, en el campo de la experiencia, a la unidad, entendida bien como cantidad bien como medida. De hecho, el cálculo más natural y primitivo surge de la necesidad de contar y medir. Pero las formas y modos para realizar el cálculo han surgido según las diversas formas de sistemas de numeración, así como su transcripción gráfica.

2.2.14. Algoritmo: Es cualquier cosa que funcione paso a paso, donde cada paso se pueda describir sin ambigüedad y sin hacer referencia a una computadora en particular, y además tiene un límite fijo en cuanto a la cantidad de datos que se pueden leer/escribir en un solo paso. Esta amplia definición abarca tanto a algoritmos prácticos como aquellos que solo funcionan en teoría, por ejemplo el método de Newton y la eliminación de *Gauss-Jorda*n funcionan, al menos en principio, con números de precisión infinita; sin embargo, no es posible programar la precisión infinita en una computadora, y no por ello dejan de ser algoritmos. En particular, es posible considerar una cuarta propiedad que puede ser usada para validar la tesis de Church-Turing de que toda función calculable se puede programar en una máquina de Turing (o equivalentemente, en un lenguaje de programación suficientemente general): **Aritmetizabilidad**. Es solamente operaciones innegablemente calculables que están disponibles en el paso inicial.**Medios de expresión de un algoritmo**: Los algoritmos pueden ser expresados de muchas maneras, incluyendo al lenguaje natural, pseudocódigo, diagramas de flujo y lenguajes de programación entre otros. Las descripciones en lenguaje natural tienden a ser ambiguas y extensas. El usar pseudocódigo y diagramas de flujo evita muchas ambigüedades del lenguaje natural. Dichas expresiones son formas más estructuradas para representar algoritmos; no obstante, se mantienen independientes de un lenguaje de programación específico.

La descripción de un algoritmo usualmente se hace en tres niveles:

1. **Descripción de alto nivel**. Se establece el problema, se

selecciona un modelo matemático y se explica el algoritmo de manera verbal, posiblemente con ilustraciones y omitiendo detalles.

2. **Descripción formal**. Se usa pseudocódigo para describir la secuencia de pasos que encuentran la solución.
3. **Implementación**. Se muestra el algoritmo expresado en un lenguaje de programación específico o algún objeto capaz de llevar a cabo instrucciones.

2.2.15. Resolución de problemas: En la literatura existen diversas definiciones de problemas, atendiendo cada una a diferentes puntos de vista, aunque diferentes conceptualmente, presentan elementos comunes o al menos no contradictorios. En general, todas coinciden en señalar que un problema es una situación que presenta dificultades para las cuales no hay solución inmediata.

Este concepto problema es muy importante para la didáctica, pues en la selección de los problemas a proponer a un grupo de estudiantes hay que tener en cuenta no solo la naturaleza de la tarea, sino también los conocimientos que las personas requieren para su solución.

Otro aspecto importante a tener en cuenta es que la persona quiera realmente hacer las transformaciones que le permiten resolver el problema, lo que significa que si no está motivada, la situación planteada deja de ser un problema al no sentir el deseo de resolverlo, en resumen, en la solución de problemas hay al menos dos condiciones que son necesarias: la vía tiene que ser desconocida y el individuo quiere resolver el problema.

2.2.16. Fases para resolver un problema aritmético.

Para resolver problemas no existen fórmulas mágicas; no hay un conjunto de procedimientos o métodos que aplicándolos lleven necesariamente a la resolución del problema (aún en el caso de que tenga solución).

Es ya clásica, y bien conocida, la formulación que hizo Polya de las cuatro etapas esenciales para la resolución de un problema, que constituyen el punto de arranque de todos los estudios posteriores:

- **Comprender el problema**. Para la comprensión del problema el alumno tendrá que realizar una lectura detallada, para separar lo dado de lo buscado, lograr hallar alguna palabra clave u otro recurso que permita encontrar una adecuada orientación en el contexto de actuación, expresar el problema con sus palabras, realizar una figura de análisis, establecer analogías entre el problema y otros problemas o entre los conceptos y juicios que aparecen en el texto y otros conceptos y juicios incorporados al saber del individuo, o transferir el problema de un contexto a otro.

- **Analizar el problema**. Para ello el alumno deberá analizar nuevamente el problema para encontrar relaciones, precisando e interpretando el significado de los elementos dados y buscados. Relacionará éstos con otros que puedan sustituirse en el contexto de actuación. Generalizará las propiedades comunes a casos particulares, mediante la comparación de éstos sobre la base de la distinción de las cualidades relevantes y significativas de las que no lo son. Tomará decisiones, al tener que comparar diferentes estrategias y procedimientos para escoger el más adecuado.

- **Solucionar el problema**. Para la realización de esta acción el alumno deberá: Aplicar a la solución del mismo los elementos obtenidos en el análisis del problema.

- **Evaluar la solución del problema**. El sujeto deberá analizar la solución planteada, contemplando diferentes variantes para determinar si es posible encontrar otra solución, verificando si la solución hallada cumple con las exigencias planteadas en el texto del problema. Valorar críticamente el trabajo realizado, determinando cuál solución es.

Es preciso destacar que estas etapas no se dan separadas, aisladas entre sí, sino muy estrechamente unidas con un carácter de espiral, que se expresa en el hecho de quien resuelve el problema repite en determinados niveles un mismo tipo de actividad que caracteriza una etapa concreta.

2.2.17. Estrategias en la resolución de problemas aritméticos.

A partir de los diagnósticos realizados en este campo, se identifican tres aspectos claves:

1. ***La autonomía,*** entendida como la organización del aula, lo cual comprende tanto los recursos para la enseñanza, como la creación de un ambiente psicológicamente apropiado para que el estudiante aprenda, tanto de manera independiente, como interdependiente.
   La dirección del aula y de la disciplina: a través del desarrollo e implementación de horarios y rutinas claras, que ayuden al alumno a asumir su responsabilidad sobre su propio aprendizaje.

2. ***La autodirección,*** entendida como la organización del currículo y planes de enseñanza: dirigidas a promover la cooperación y la dirección del propio aprendizaje, teniendo en cuenta las necesidades de los estudiantes, así como el uso efectivo del tiempo disponible.
   La organización de trabajos grupales que fomenten la interdependencia y cooperación entre estudiantes de diversos grados.

3. ***La autorregulación,*** comprometida como la promoción del autoaprendizaje, generando oportunidades de aprendizaje en las que los alumnos desarrollen habilidades y estrategias que le permitan un alto nivel de independencia y eficacia en su propio proceso de aprendizaje, tanto en el trabajo individual como grupal.

La organización e implementación de actividades de aprendizaje en las cuales algunos estudiantes se desempeñan como tutores de otros.

2.3. Definición de términos

- **Cálculo como lógica de relaciones:** Cuando se toma la oración simple significativa con posible valor de verdad propio, verdadero o falso, como resultado del análisis de la oración como una relación "R" que se establece entre un sujeto y un predicado. Así la oración simple "Antonio es mayor que Pedro", se considera y simboliza bajo la relación "ser mayor que" ® que se da entre Antonio (a) y Pedro (p) y se simboliza como *aRp*. La simbolización y formación de EBFs en cada uno de esos cálculos, así como las reglas de cálculo se trata en cálculo lógico.

- **Cálculo aritmético:** Aritmética es la rama de la matemática que estudia ciertas operaciones de los números y sus propiedades elementales. Proviene del griego *arithmos* y *techne* que quieren decir, respectivamente, números y habilidad. El número en aritmética elemental tiene la consideración de número natural referido, en el campo de la experiencia, a la unidad, entendida bien como cantidad bien como medida. De hecho, el cálculo más natural y primitivo surge de la necesidad de contar y medir. Pero las formas y modos para realizar el cálculo han surgido según las diversas formas de sistemas de numeración, así como su transcripción gráfica.

- **Algoritmo:** Es cualquier cosa que funcione paso a paso, donde cada paso se pueda describir sin ambigüedad y sin hacer referencia a una computadora en particular, y además tiene un límite fijo en cuanto a la cantidad de datos que se pueden leer/escribir en un solo paso. Esta amplia definición abarca tanto a algoritmos prácticos como aquellos que solo funcionan en teoría, por ejemplo el método de Newton y la eliminación de *Gauss-Jorda*n funcionan, al menos en principio, con números de precisión infinita; sin embargo, no es posible programar la precisión infinita en una computadora, y no por ello dejan de ser algoritmos. En particular, es posible considerar una cuarta propiedad que puede ser usada para validar la tesis de Church-Turing de que toda función calculable se puede programar en una máquina de Turing (o equivalentemente, en un lenguaje de programación suficientemente general):

Aritmetizabilidad. Es solamente operaciones innegablemente calculables que están disponibles en el paso inicial.

Medios de expresión de un algoritmo: Los algoritmos pueden ser expresados de muchas maneras, incluyendo al lenguaje natural, pseudocódigo, diagramas de flujo y lenguajes de programación entre otros. Las descripciones en lenguaje natural tienden a ser ambiguas y extensas. El usar pseudocódigo y diagramas de flujo evita muchas ambigüedades del lenguaje natural. Dichas expresiones son formas más estructuradas para representar algoritmos; no obstante, se mantienen independientes de un lenguaje de programación específico.

La descripción de un algoritmo usualmente se hace en tres niveles:

1. **Descripción de alto nivel**. Se establece el problema, se selecciona un modelo matemático y se explica el algoritmo de manera verbal, posiblemente con ilustraciones y omitiendo detalles.
2. **Descripción formal**. Se usa pseudocódigo para describir la secuencia de pasos que encuentran la solución.
3. **Implementación**. Se muestra el algoritmo expresado en un lenguaje de programación específico o algún objeto capaz de llevar a cabo instrucciones.

También es posible incluir un teorema que demuestre que el algoritmo es correcto, un análisis de complejidad o ambos.

- **Resolución de problemas:** En la literatura existen diversas definiciones de problemas, atendiendo cada una a diferentes puntos de vista, aunque diferentes conceptualmente, presentan elementos comunes o al menos no contradictorios. En general, todas coinciden en señalar que un problema es una situación que presenta dificultades para las cuales no hay solución inmediata.

Este concepto problema es muy importante para la didáctica, pues en la selección de los problemas a proponer a un grupo de estudiantes hay que tener en cuenta no solo la naturaleza de la tarea, sino también los conocimientos que las personas requieren para su solución.

Otro aspecto importante a tener en cuenta es que la persona quiera realmente hacer las transformaciones que le permiten resolver el problema, lo que significa que si no está motivada, la situación planteada deja de ser un problema al no sentir el deseo de resolverlo, en resumen, en la solución de problemas hay al menos dos condiciones que son necesarias: la vía tiene que ser desconocida y el individuo quiere resolver el problema.

- **Rendimiento académico:** Es el resultado del logro de los objetivos planteados en la programación curricular, lo cual se expresa a través de diferentes criterios de evaluación, de los cuales finalmente obtendremos un promedio.
- **Resolución:** Se conoce como **resolución** al **acto y consecuencia de resolver o resolverse** (es decir, de encontrar una solución para una dificultad o tomar una determinación decisiva). El término puede aprovecharse para nombrar al **coraje o valor** o bien al **ánimo** para efectuar un determinado bien ordenado utilizando algoritmos.

Evidentemente la resolución de problemas está estrechamente relacionada con la creatividad, que algunos definen precisamente como la habilidad para generar nuevas ideas y solucionar todo tipo de problemas y desafíos. La especie humana es creativa por naturaleza. Todo ser humano nace con un gran potencial para la creación, pero mientras algunos lo aprovechan al máximo, otros casi no lo utilizan.

- **Comprensión lectora:** Es un proceso en el cual, a partir del análisis, se descubre la estructura, se interpreta la esencia de lo que el autor ha escrito y se expresa la construcción de un significado.
- **Hipótesis de interpretación:** Se refiere a la anticipación de posibles interpretaciones cuando nos enfrentamos a un texto, poniendo en juego nuestros saberes previos y saberes del texto.
- **Interpretación crítica:** Se refiere al análisis y evaluación del contenido de un texto leído.
- **Interpretación inferencial:** Se refiere al hecho de descubrir lo que el texto quiere decir.
- **Interpretación literal:** Nivel de lectura donde el alumno reconoce a los sujetos, eventos u objetos mencionados en un texto. Conocimiento del significado literal de una palabra, una frase, un gesto, un signo, etc.
- **Leer:** Proceso de interacción entre el lector y el texto a través del cual se construye un significado, a partir de los conocimientos y experiencias previas del lector, y con el propósito de satisfacer los objetivos que guían su lectura.
- **Texto:** Lo dicho o escrito por un autor, notas o comentarios que sobre ello se hacen. Todo lo que se lee en un cuerpo de una obra impresa o manuscrita.
- **Aprendizaje:** Es el proceso de construcción de representaciones personales significativas y con sentido de un objeto o situación de la realidad. Los aprendizajes no son solo procesos intrapersonales, sino fundamentalmente interpersonales. Asimismo es necesario que el alumno y alumna durante el proceso de construcción tome conciencia de lo que desea aprender y cómo es que aprende (metacognición). Esto le permitirá descubrir sus potencialidades y limitaciones y le posibilitará ser capaz de enfrentar las dificultades que se le presentan con mayor éxito (Minedu, 1997:28).

- **Aprendizaje significativo*:*** Es comprender un significado e incorporarlo a la estructura cognitiva, de modo de lo que tenga disponible; ya sea para reproducirlo o relacionarlo con otro aprendizaje, para solucionar problemas en fecha futura (Minedu, 1997:30).

- **Aprendizaje de conceptos:** La idea de que la educación consiste en que el alumno adquiera un cúmulo de información sin significado, ya no nos rige. No puede pensarse más en que el punto de partida de la enseñanza lo constituye un temario infinito que hay que cubrir a como dé lugar, estructurando algunas veces lógicamente, sin alcanzar la claridad que sería deseable, y otras veces bajo el criterio respetable pero personal del maestro; ni puede continuarse la práctica de evaluación al estudiante, siempre y en todos los casos, a través de la comparación de su rendimiento con el de los demás miembros del grupo.

- **Capacidades:** Constituyen las prácticas que son necesarias para regular racionalmente una actividad en ejecución y cuyo dominio es progresivo por los sujetos que practican dicha actividad. Dicho dominio se alcanza a través de una práctica continua, sistemática y asistida en la búsqueda de adquirir mayor solvencia en los desempeños que requiere de dichos procesos. Este es el sentido en el que deben entenderse las Capacidades de cada área, que están pensadas para cimentar el tipo de trabajo o de acciones que deben ser de naturaleza frecuente y regular en el tratamiento de todos los contenidos curriculares que le pertenecen al área, incluyendo en ello las disposiciones o estados de ánimo que influyen significativamente en tales acciones. Las capacidades son potencialidades inherentes a la persona y que ésta procura desarrollar a lo largo de toda su vida. Tienen carácter socio – afectivo y cognitivo, y están asociadas a actitudes y valores, garantizando así la formación integral de la persona. Con fines operativos se han formulado las capacidades fundamentales, capacidades de área y capacidades específicas.

- **Competencia:** Es entendida como el dominio de un sistema complejo de procesos, conocimientos y actitudes que facilitan un desempeño eficaz y adecuado ante una exigencia de actuación típica dentro de las situaciones propias al ejecutante.

- **Currículo:** Es el conjunto de experiencias de aprendizaje significativo que vivencian los alumnos y alumnas de interacción con otros y en contextos culturales determinados (Minedu, 1997:33).

- **Educación:** La educación es un proceso social y personal permanente, que procura desarrollar las potencialidades de cada persona y dinamizar la vida social, con la valoración, respeto y aprovechamiento honesto de las diferentes individuales. El eje del proceso educativo en la escuela es el alumno y la alumna (Minedu, 1997:27).

- **Enseñanza**: Es la función del profesor que consiste en crear un clima de confianza, sumamente motivador, y de proveer los medios necesarios para que los alumnos desplieguen sus potencialidades. En esta perspectiva, el profesor actúa como un mediador afectivo y cognitivo en el proceso aprendizaje de los alumnos y alumnas (Minedu, 1997:32).

- **Estrategias:** El término estrategia, cuando lo relacionamos con la educación, es el conjunto de actividades seleccionadas y organizadas en el tiempo y en el espacio por el docente para facilitar el aprendizaje; incluye: métodos, técnicas, procedimientos, medios y materiales educativos, señalando la relación existente entre ellos como con los objetivos y contenidos; su función es proporcionar a los alumnos lo necesario para lograr un objetivo de aprendizaje.
- La estrategia didáctica es la **ejecución** ordenada de todos los elementos disponibles por parte del profesor, y la estrategia metodológica es la **planificación** ordenada de todos los elementos disponibles por parte del profesor.

- **Método – procedimiento:** Entre método y procedimiento hay una estrecha relación, pues ambos se difieren; en la didáctica, al conjunto de medio que emplea el maestro para dirigir el aprendizaje de sus alumnos. Pero, a pesar de este punto de contacto, hay diferencias bastante, marcadas.

- El método es un concepto más amplio que procedimiento, pues cada método necesita de uno o más procedimientos para su puesta en marcha. Si el método es, como se ha visto, en marcha, en camino, de acuerdo con un plan; el procedimiento, implica, como expresa su etimología, ponerse en movimiento, dinamizar el empleo del método, conectarlo con la realidad; en una palabra, hacerlo viable: De este modo, método y procedimiento son inseparables. “El método es el camino, los procedimientos son la marcha o manera de andar por él en el viaje de aprendizaje. Ellos varían de materia a materia, de método a método y a veces dentro de una misma clase”.

- **Procedimiento y forma didáctica;** por las definiciones bosquejadas, podemos decir que la forma es el ropaje exterior con el cual se presenta la materia, mientras que los procedimientos son los medios específicos de que se vale el maestro, para aplicar un método. Hernández Ruiz expresa que el procedimiento es la única que expresa la manera de proceder en el desarrollo efectivo de una actividad cualquiera “y forma es, la única que significa aspecto o disposición particular del trabajo docente”. Es que el procedimiento implica los detalles, los medios que se emplean para poner en marcha el método, tales como actividades a cumplir, secuencias de las mismas, uso de materiales y momento de su empleo, etc.; y la forma se refiere al empleo de medios de los que va a servirse el maestro para que el alumno logre el aprendizaje, tales como la palabra, el libro, etc.

- **Metodología:** Se refiere al proceso que se sigue en la aplicación del método. Pero, queremos recalcar que dicho proceso a seguir en cada método no significan pasos rígidos ni mucho menos. No ha pasado por nuestra mente querer reeditar los pasos formales, rígidos y esquemáticos. El esquema propuesto para cada método es susceptible de modificaciones en razón del tema, del nivel de estudios, del maestro, de los materiales y otras circunstancias especiales. Lejos estamos del esquematismo rígido, porque ello significa la muerte de la iniciativa del maestro.

Por otra parte, postulamos aquí un grupo de métodos llamados activos. Hasta ahora se ha escrito y hablado mucho acerca de los métodos activos, pero al momento de estudiar se hace solamente de los sistemas didácticos, son asuntos de la nueva educación y por ende de la escuela nueva. Pero, por definición, los sistemas son algo más que los métodos. Ya hemos aclarado nuestro punto de vista sobre el particular. Pero aún dentro de cada sistema didáctico va implícito algún método con procedimientos específicos, y que inclusive se puede aplicar sin necesidad de organizar el sistema respectivo. Así, dentro del sistema Winnetka está el método de trabajo individual, con procedimientos peculiares; y que este método, en cuanto tal, se puede aplicar sin necesidad de organizar la escuela bajo el sistema creado por Washburne. Por supuesto, que a estos métodos activos, tanto individualizados y colectivizados como globales, los presentamos como tesis, susceptibles de ideas discrepantes y de ampliaciones por estudiosos de la materia.

- **Técnicas:** La técnica no es el camino como el método, ni es enlazamiento de procesos como el sistema. Es el arte de recorrer ese camino o de ejecutar los procesos. Se refiere siempre al empleo adecuado de procedimientos, de ciertos instrumentos y a la utilización de ciertos materiales, ya se trate de una ciencia u oficio. En la actualidad, se entiende la técnica didáctica como algo que implica el mejor empleo de métodos, procedimientos y formas. Por tanto, al decir técnica didáctica hemos de entender, por lo menos para nuestro estudio, como la puesta en práctica adecuada de métodos, procedimientos y formas a la vez.

- **Proceso:** Es el curso o serie de fenómenos sucesivos o vinculados entre sí que construyen un sistema, una unidad o una totalidad. Es, además, una sucesión de cambios en la que, a pesar de éstos, se mantiene una identidad de carácter. Se entiende, también, el proceso como el conjunto de procedimientos y secuencia de actividades a seguir en el desarrollo del aprendizaje.

- **Los nodos:** Un **vértice** o **nodo** es la unidad fundamental de la que están formados los grafos. Un grafo no dirigido está formado por un conjunto de vértices y un conjunto de aristas (pares no ordenados de vértices), mientras que un grafo dirigido está compuesto por un conjunto de vértices y un conjunto de **arcos** (pares ordenados de vértices).

- **Las aristas:** Corresponde a una relación entre dos vértices de un grafo.

CAPITULO III
METODOLOGÍA

3.1. Tipo de investigación

La investigación ha desarrollarse en el presente trabajo es de tipo básico, en los niveles descriptivo y explicativo; por cuanto se trata de determinar la relación existente entre la teoría de grafos y la resolución de problemas aritméticos en los estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco.

3.2. Métodos de investigación

Para el desarrollo de la investigación se empleará predominantemente el método científico, experimental de campo, documental y bibliográfico (Kerlinger, F., 2001: 418-419).

- **Método científico**: Considerado con sus procedimientos de: planteo del problema de investigación, construcción de un modelo teórico, deducción de secuencias particulares, prueba de hipótesis y conclusiones arribadas en la teoría.

- **Método experimental de campo**: Considerado a que nos conlleva a contrastar los resultados obtenidos de la aplicación del pre y post test, la experiencia con la interpretación de la teoría de grafos en la resolución de problemas aritméticos, en estudiantes seleccionados como muestra de estudio.

- **Método documental y bibliográfico**: Consiste en tomar información estadística de las fuentes documentales de la secretaría del laboratorio, las mismas que nos sirvieron para revisar promedios de notas de los estudiantes en tratamiento.

- **Método estadístico**: Considerado con el fin de recopilar, organizar, codificar, tabular, presentar, analizar e interpretar los datos obtenidos en la muestra de estudio durante la investigación.

3.3. Diseño de investigación

El diseño de investigación que permite lograr los objetivos propuestos y contrastar la hipótesis, es el descriptivo correlacional. El esquema es:

$$\begin{tikzcd} & X0_1 \arrow[d] \\ M \arrow[ur] \arrow[dr] & R \\ & Y0_2 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Donde:

M = unidad de estudio

X = teoría de grafos.

r = correlación

Y = resolución de problemas aritméticos

0_1 y 0_2 = Evaluación de cada uno de las variables.

3.4. Población y muestra de estudio

La población estuvo conformada por 112 estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco. Así:

Grados de estudios	Población	%
1er año	25	22,3
2do año	21	18,8
3er año	19	17,0
4to año	27	24,1
5to año	20	17,8
Total	**112**	**100,0**

Fuente: Informe Unidad de Gestión Educativa Local Pasco 2012 y 2013

La muestra se determinó utilizando la fórmula correspondiente tendiendo como parámetro el tamaño poblacional y un error muestral de 5 % y 95 % de confiabilidad. Por lo tanto fue una muestra estratificada proporcional utilizando la siguiente fórmula para hallar el tamaño de la muestra cuando la población es finita.

$$n_o = \frac{4.p.q.N}{E^2(N-1)+4.p.q}$$

*n*o = tamaño de la muestra

E = Equivale a 2 (nivel de precisión)

p = 50 % (probabilidad de éxito).

q = 50 % (probabilidad de fracaso).

Reemplazando en la fórmula.

$$n_o = \frac{4x50x50x112}{2^2(112-1)+4x50x50} = 107{,}2386$$

Redondeando el valor obtenido anteriormente la muestra de estudio es de 108 estudiantes.

Así mismo se utilizó la corrección de la muestra utilizando la siguiente fórmula estadística.

$$n = \frac{n_o}{1 + \frac{n_o}{N}}$$

Donde:

n = Tamaño final de la muestra

n_o = Tamaño inicial de la muestra

N = Población considerada.

Reemplazando:

$$n = \frac{108}{1 + \frac{108}{112}} = 54{,}981978$$

Se obtuvo una muestra final de 55 estudiantes como unidad de muestra, siendo la representación porcentual el 49,1%.; siendo el criterio alfa.

3.5. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

3.5.1. Descripción de las técnicas e instrumentos

A: Con la prueba pedagógica se busca obtener en las estudiantes un nivel aceptable en la interpretación de la teoría de grafos por medio de sus fases y niveles en la resolución de problemas aritméticos.

B. La teoría de grafos y la resolución de problemas aritméticos

Elaborado por el investigador, servirá para preguntar a expertos del (manejo e interpretación de esta teoría y su relación en la resolución de problemas aritméticos).

El instrumento, comprende secciones que contiene ítems con criterios de docente y estudiantes que recoge criterios educativos, reacciones del usuario, acciones motoras y situaciones prácticas.

3.5.2. Recolección de datos

Se realizará a través de:

-**Documental**: para la elaboración y ampliación de los antecedentes de la investigación, para la elaboración del marco teórico y conceptual referente a la investigación.

-**Codificación**: para codificar a los estudiantes elegidos de los niveles alfa, beta y gama. Así mismo codificar el cuestionario a cada una de las variables.

-**Tabulación**: para tabular los datos que se obtendrán durante el proceso de la investigación.

3.6. Técnicas de procesamiento de datos

3.6.1. Procesamiento manual.

Textos: se utilizaran para encontrar información sobre investigación científica y para estudiar con respecto a técnicas estadísticos y finalmente información acerca del marco teórico.

Láminas: fue de gran beneficio para encontrar información con relación al marco teórico.

3.6.2. Procesamiento electrónico.

- ❖ Computadora: Para el procesamiento de la información en todos los eventos de la investigación.
- ❖ USB: La compilación y cruce de información.
- ❖ Impresora: Para la difusión del proyecto e informe final del trabajo.
- ❖ Scanner: Para la divulgación de momentos del proceso investigativo.

3.6.3. Técnicas estadísticas.

- ❖ **La media:** La media aritmética es el valor obtenido al sumar todos los datos y dividir el resultado entre el número total de datos. Se utilizaran para conocer el promedio de las notas obtenidas en la unidad muestral.

- **La mediana:** Es el valor que ocupa el lugar central de todos los datos cuando éstos están ordenados de menor a mayor o viceversa.
- **La moda:** Es el dato que más se repite en una muestra de estudio. Se utilizaran para verificar el resultado obtenido.
- **Estadística Inferencial**: servirán para obtener conclusiones de la investigación para toda la población a partir del estudio de la unidad muestral, y el grado de fiabilidad o significación de los resultados obtenidos.

- Para la comprobación de hipótesis se utilizaran métodos de la estadística inferencial, Para mayor precisión y exactitud de los resultados se utilizaran los programas computarizados Microsoft Excel y el SPSS 20.

3.7. Sistema de hipótesis y variables de investigación

3.7.1. Hipótesis General

La utilización adecuada de la teoría de grafos influye positivamente en la resolución de problemas aritméticos para estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco - 2014.

3.7.2. Hipótesis especificas

Los fundamentos teóricos y prácticos de la utilización de la teoría de grafos, por medio de sus fases; son óptimos para el uso en la resolución de problemas aritméticos, en los estudiantes en tratamiento.

La teoría de grafos con sus niveles: literal, inferencial y crítico son los organizadores del conocimiento; con estrategias en la resolución de problemas aritméticos para los estudiantes del caso.

3.7.3. Sistema de variables

Variable independiente: La teoría de grafos

Variable dependiente: Resolución de problemas aritméticos**.**

3.7.4. Definición conceptual

La **teoría de grafos** (también llamada **teoría de las gráficas**) es un campo de estudio de las matemáticas y las ciencias de la computación, que estudia las propiedades de los grafos (también llamadas gráficas, que no se debe confundir con las gráficas que tienen una acepción muy amplia) estructuras que constan de dos partes, el conjunto de vértices, nodos o puntos; y el conjunto de aristas, líneas o lados (edgesen inglés) que pueden ser orientados o no. La teoría de grafos es una rama de la Matemática discreta y de las aplicadas, y es un tratado que usa diferentes conceptos de diversas áreas como Análisis combinatorio, Álgebra abstracta, probabilidad, geometría de polígonos, aritmética y topología. Actualmente ha tenido mayor preponderancia en el campo de la informática, las ciencias de la computación y telecomunicaciones.

Resolución de problemas: En la literatura existen diversas definiciones de problemas, atendiendo cada una a diferentes puntos de vista, aunque diferentes conceptualmente, presentan elementos comunes o al menos no contradictorios. En general, todas coinciden en señalar que un problema es una situación que presenta dificultades para las cuales no hay solución inmediata.

Este concepto problema es muy importante para la didáctica, pues en la selección de los problemas a proponer a un grupo de estudiantes hay que tener en cuenta no solo la naturaleza de la tarea, sino también los conocimientos que las personas requieren para su solución.

Otro aspecto importante a tener en cuenta es que la persona quiera realmente hacer las transformaciones que le permiten resolver el problema, lo que significa que si no está motivada, la situación planteada deja de ser un problema al no sentir el deseo de resolverlo, en resumen, en la solución de problemas hay al menos dos condiciones que son necesarias: la vía tiene que ser desconocida y el individuo quiere resolver el problema.

La **aritmética** (del lat. arithmetĭcus, y este del gr. ἀριθμητικός, ἀριθμός número—) es la rama de la matemática cuyo objeto de estudio son los números y las operaciones elementales hechas con ellos: suma, resta, multiplicación y división. Al igual que en otras áreas de la matemática, como el álgebra o la geometría, el sentido de «la aritmética» ha ido evolucionando con el progresivo desarrollo de las ciencias. Originalmente, la aritmética se desarrolla de manera formal en la Antigua Grecia, con el refinamiento del rigor matemático y las demostraciones, y su extensión a las distintas disciplinas de las «ciencias naturales». En la actualidad, puede referirse a la aritmética elemental, enfocada a la enseñanza de la matemática básica; también al conjunto que reúne el cálculo aritmético y las operaciones matemáticas, específicamente, las cuatro operaciones básicas aplicadas ya sea a números (naturales, fracciones, etc.) como a entidades matemáticas más abstractas (matrices, operadores, etc); también a la así llamada alta aritmética, mejor conocida como teoría de números.

3.7.5. Definición operacional

VARIABLES	DIMENSIÓN	CONCEPTO	INDICADORES
V. I. Teoría de grafos	Fases de su aplicabilidad	Control para aprender	Concentración, inspección, interrogación, lectura, producción, repaso y evaluación
	Niveles de interpretación	Motivar, sensibilizar para actuar / estudiar	Tipo literal, tipo inferencial y tipo crítico
V. D. Resolución de	Sobresaliente	Resultado excelente	De 81 – 100
	Bueno	Producto satisfactorio	De 45 – 80

problemas aritméticos	Regular	Logro medianamente	De 21 – 45
	Deficiente	Logro incompleto	De 20 a menos

FUENTE: Acopio del investigador

Rendimiento académico. Chadwick (1979) define el rendimiento académico como la expresión de capacidades y de características psicológicas o indicador del nivel de aprendizaje del estudiante desarrolladas y actualizadas a través del proceso de enseñanza-aprendizaje que le posibilita obtener un nivel de funcionamiento y logros académicos a lo largo de un período o semestre, que se sintetiza en un calificativo final (cuantitativo en la mayoría de los casos) evaluador del nivel alcanzado.

CAPITULO IV

MARCO PRÁCTICO

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Tratamiento estadístico e interpretación de datos.- En los siguientes cuadros y gráficos que a continuación expreso se muestran los resultados obtenidos luego de las sesiones de clases por actividades y las evaluaciones según anexo 2 y 3 a las variables respectivas según diseño de investigación; así:

- Para la confiabilidad de los instrumentos elaborados para la aplicación a la nuestra, se aplicó algunas fórmulas como Alfa – Cronbach ayudado por Pagano (2002), y el software estadístico SPSS versión 20.0 en español, la misma que orientó al cumplimiento de los objetivos propuestos.
- Para establecer las inferencias estadísticas se eligió un nivel de significación de 5% ($\alpha = 0,05$) y una aceptación de acierto al 95% por tratarse de una investigación educativo - social. Para comprobar las hipótesis de estudio se aplicó la x^2 - cuadrado y establecer el grado de correlación entre variables: teoría de grafos y la resolución de problemas aritméticos, ya que la muestra de estudio es estable, la

misma que orientó la explicación de las hipótesis programadas, por medio de la contratación de hipótesis de la presente.

4.1.1. **Cronograma de sesiones:** se realiza la exposición de la temática en sesiones de aprendizaje por actividades para toda la muestra según anexo 4, su cumplimiento según cronograma:

Cronograma

ACTIVIDAD	***FECHA***
Uno Los grafos	*08 de abril de 2014*
Dos Leonhard Euler y la teoría de grafos	*15 de abril de 2014*
Tres Conceptos previos y terminología	*22 de abril de 2014*
Cuatro Subgrafos	*29 de abril de 2014*
Cinco Ejemplos de problemas en la teoría de grafos	*06 de mayo de 2014*
Seis Demostración de algunos teoremas	*13 de mayo de 2014*
Siete *Evaluación: anexo 2*	*20 de mayo de 2014*
Ocho *Resolución de problemas aritméticos*	*10 de junio de 2014*
Autoevaluación/reforzamiento	*17 de junio de 2014*
Evaluación: anexo 3	*24 de junio de 2014*

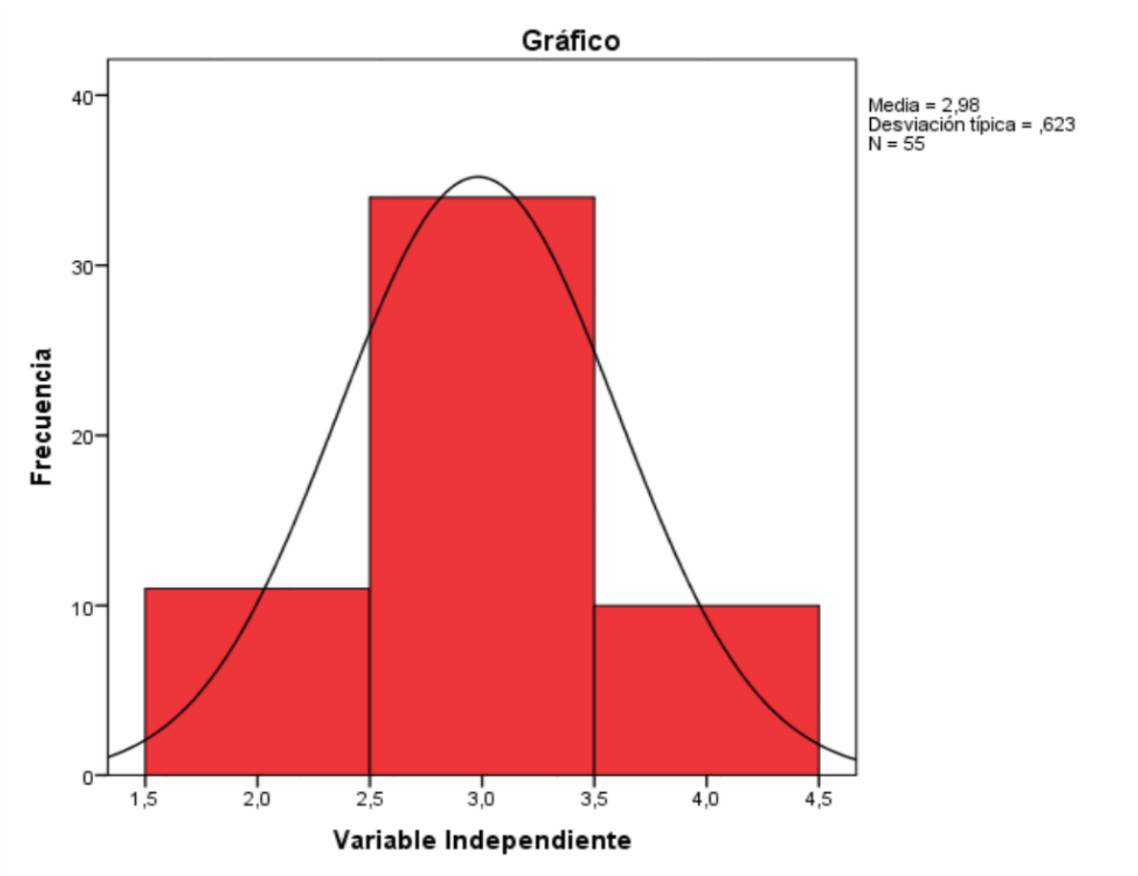
Fuente: elaborado por el investigador

4.1.2. Presentación de resultados.

Luego del cumplimiento del cronograma 4.1.1., con las aplicaciones del anexo 4; con el trabajo según las actividades programadas por medio de las estrategias: autonomía, autodirección y autorregulación, en la resolución de problemas aritméticos; posterior a ello se aplicó el anexo 2 y 3 respectivamente siendo las conclusiones resumidas, así:

Cuadro 1: Variable independiente				
Distribución Puntaje	f_i	h_i%	h_i%	H_i%
[5 - 10)	11	20,0	20,0	20,0
[10 - 15)	34	61,8	61,8	81,8
[15 - 20)	10	18,2	18,2	100,0
Total	55	100,0	100,0	

FUENTE: Resultados del pre test.

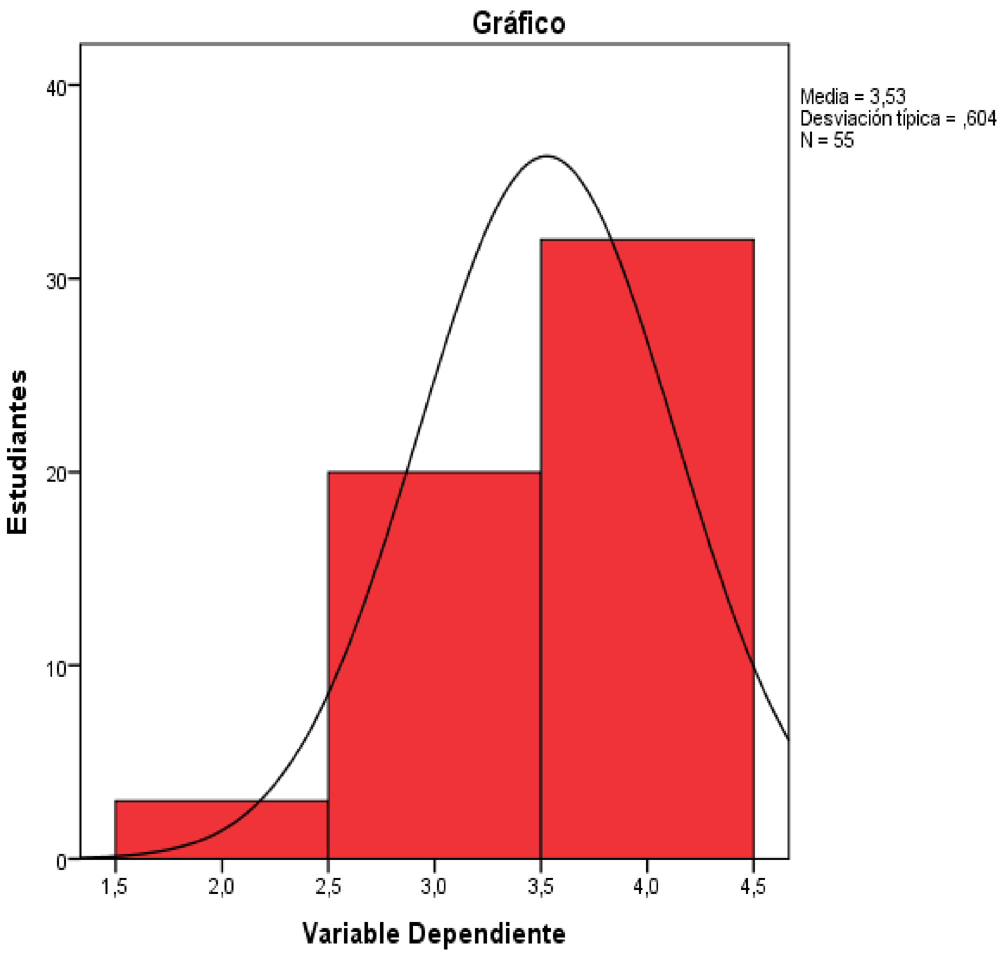


Interpretación: Del cuadro y grafico se deduce de los 55 estudiantes en tratamiento 34 de ellos tienen promedios entre 10 a 14 puntos siendo esto la mayoría representando la moda, con su representación del 61,8%, mientras el resto están compartidos entre el resto de los puntajes.

Cuadro 2: Variable dependiente				
Distribución Puntaje	f_i	h_i%	h_i%	H_i%
[5 - 10)	3	5,5	5,5	5,5

[10 - 15)	20	36,4	36,4	41,8
[15 - 20)	32	58,2	58,2	100,0
Total	55	100,0	100,0	

FUENTE: Resultados del pre test.

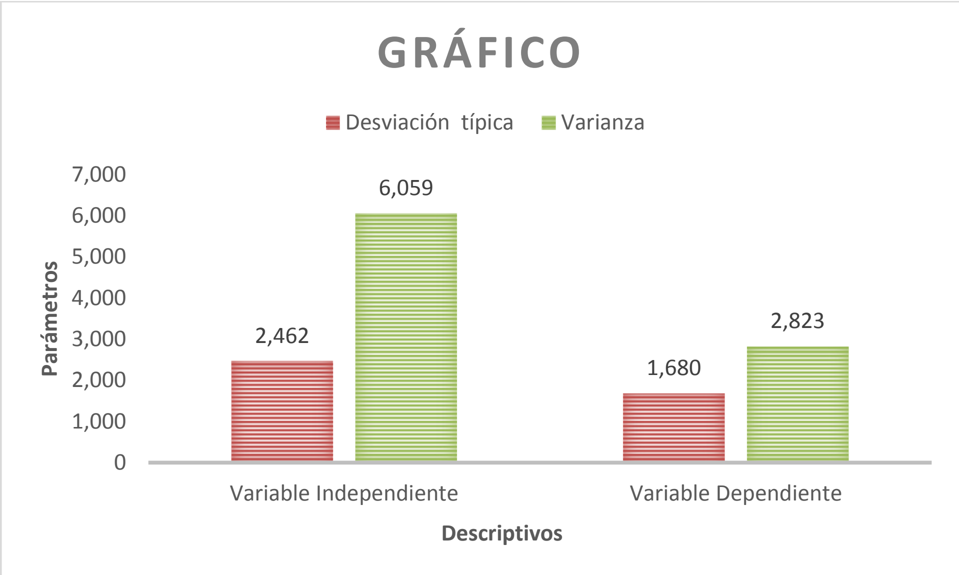


Interpretación: De acuerdo al cuadro 02 y su gráfico el 58,20% de los estudiantes tienen promedios entre 15 a 19 puntos, 20 de ellos están entre 10 a 14 puntos respectivamente y 3 de ellos con puntajes de 5 a 9 puntos en esta variable.

4.1.3 Comparación de las variables

En el siguiente cuadro presento la comparación de los estadísticos en las variables en tratamiento luego de la aplicación del anexo 2 y 3 respectivamente.

Cuadro 3 Estadísticos descriptivos							
Estadísticos / Variable	N	Mínimo	Máximo	Media		Desviación típica	Varianza
Variable Independiente	55	8	17	13,40	0,332	2,462	6,059
Variable Dependiente	55	10	17	15,25	0,227	1,680	2,823



Interpretación: Observamos en el cuadro y gráfico precedente, siendo el parámetro o rango es de 8 a 17 de los 0 a 20 programados; mientras la media aritmética es de 13,40 para la variable independiente y 15,25 para la variable dependiente, existiendo una diferencia de 1,85 en las medias. Po otra parte, calculando el coeficiente de variación se tiene para variable independiente 0,18 y 0,11 para la variable dependiente, se nota que la tendencia a cero es de la variable dependiente, entonces existiendo una relación entre estas dos variables en el trabajo de investigación.

4.2. Contrastación de hipótesis:

Para probar la hipótesis, se analizó teniendo en cuenta el diseño de investigación establecido, el resultado de la muestra de estudio y las hipótesis a través de la comparación de las variables independiente y dependiente.

Para la comprobación de la hipótesis se aplicó la **prueba de chi cuadrada**, con un nivel de significación de 0,05 o 95% de confiabilidad ($\alpha = 0,05_{\text{unilateral}}$), para el cual planteamos la hipótesis estadística:

PRIMERO:

Hipótesis nula H_0: La utilización adecuada de la teoría de grafos no influye positivamente en la resolución de problemas aritméticos para estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco - 2014.

H_0: $x^2 = 0$

Hipótesis alterna H_1: La utilización adecuada de la teoría de grafos influye positivamente en la resolución de problemas aritméticos para estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco - 2014.

H_1: $x^2 \geq 0$; La conclusión utilizando $\alpha = 0,05$

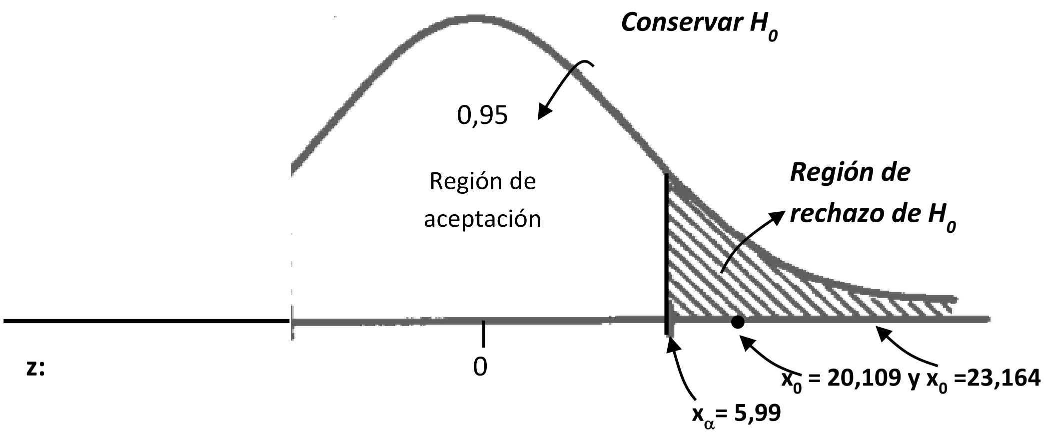
Para este caso están presentes las variables de estudio, determinando sus estadígrafos de cada uno de ellos, según los datos obtenidos y presentados en el siguiente cuadro:

Estadísticos de contraste		
	Variable Independiente	Variable Dependiente
Chi-cuadrado	20,109[a]	23,164[a]
Grado de libertad	2,000	2,000
Signo asíntota	0,000	0,000
Signo exacta	0,000	0,000
Probabilidad en el punto	0,000	0,000
a. 0 casillas (0,0%) tienen frecuencias esperadas menores que 5. La frecuencia de casilla esperada mínima es 18,3.		

FUENTE: Contraste de los datos.

SEGUNDO:

Al elegir el nivel de significancia de $\alpha = 0{,}05_{1\ cola}$ ó 5% unilateral, esto quiere decir que observamos una probabilidad de 0,05 ó 5% de rechazar la hipótesis nula Ho y una región de aceptación al 0,95, con grado de libertad 2,000 y ubicando en la tabla Ji-cuadrada el valor es $x_\alpha = 5{,}99$ como punto crítico; entonces se observa:



TERCERO:

Del cuadro que se presenta en el paso primero, se tiene $x^2 = 20{,}109$ de la variable independiente y $x^2 = 23{,}164$ y la variable dependiente; donde la ubicación del resultado está en la región de rechazo; por lo que se descarta la hipótesis nula H_0.

CUARTO:

Tomando la decisión, $x^2 = 20{,}109 \geq 5{,}99$ y $x^2 = 23{,}164 \geq 5{,}99$ se rechaza la **H_0:** La utilización adecuada de la teoría de grafos no influye positivamente en la resolución de problemas aritméticos para estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco - 2014.; y se acepta la hipótesis alterna, es decir: **H_1:** La utilización adecuada de la teoría de grafos influye positiva-mente en la resolución de problemas aritméticos para estudiantes del

Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco - 2014., por lo tanto, existe una relación entre las variables presentadas y analizadas. Con respecto a "Los fundamentos teóricos y prácticos de la utilización de la teoría de grafos, por medio de sus fases; son óptimos para el uso en la resolución de problemas aritméticos, en los estudiantes en tratamiento" y "La teoría de grafos con sus niveles: literal, inferencial y crítico son los organizadores del conocimiento; con estrategias en la resolución de problemas aritméticos para los estudiantes del caso". Observando las medias de las variables presentes en la investigación se tiene $x_{vi} \leq x_{vd}$., numéricamente se tiene x_{vi} = 13,40 y x_{vd} = 15,25; siendo esta 13,40 ≤ 15,25 me induce a precisar que en la resolución de problemas aritméticos con los tres aspectos claves: la autonomía, la autodirección y la autorregulación son estrategias importantísimos como se demuestra en la programación, ejecución y resultados de las sesiones de aprendizaje, según anexo 4.

Con respecto al coeficiente de variación de las variables observamos que: variable independiente es igual a I0, 18I y en la variable dependiente siendo I0, 11I así, I0, 18I ≥ I0, 11I; con esto se demuestra que la teoría de grafos con sus niveles: literal, inferencial y critico tienen una relación para la organización de conocimientos con la estrategia en la resolución de problemas aritméticos porque el C_{vd} tiende más a cero.

Conclusiones

1. La utilización adecuada de la teoría de grafos influye positivamente en la resolución de problemas aritméticos para estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco - 2014, esto se corrobora con los resultados obtenidos en el proceso de la investigación interpretando los resultados de las variables; independiente $x^2 = 20{,}109 \geq 5{,}99$ y dependiente $x^2 = 23{,}164 \geq 5{,}99$ a través de ji – cuadrada en la contrastación de hipótesis 4.2.

2. Al comprobar la hipótesis con la prueba ji - cuadrada con un nivel de significación de 0,05 ó 95% de confiabilidad ($\alpha = 0{,}05_{1\ cola}$), se llega al resultado $x_\alpha = 5{,}99$ como punto crítico, según modelo donde la ubicación del resultado 20,109 y 23,164 está en la región de rechazo; por lo que se descarta la hipótesis nula H_0 y se acepta la hipótesis alterna H_1.

3. Concluida con el cronograma de sesiones de aprendizaje con la presentación y aplicación de las sesiones de aprendizaje, en la investigación se tomaron la prueba a los estudiantes correspondiente a las variables independiente y dependiente resultando sus coeficientes de variación I0,18I ≥ I0, 11I; independiente siendo mayor a la dependiente, con esto se demuestra que la teoría de grafos con sus niveles: literal, inferencial y critico tienen una relación para la organización de conocimientos con la estrategia en la resolución de problemas aritméticos porque el C_{vd} tiende más a cero.

4. Según las medias de las variables presentes en la investigación se tiene $x_{vi} \leq x_{vd}$.; $x_{vi} = 13{,}40$ y $x_{vd} = 15{,}25$; siendo esta $13{,}40 \leq 15{,}25$ se concluye que la resolución de problemas aritméticos con los tres aspectos claves: la autonomía, la autodirección y la autorregulación son estrategias importantísimos como se demuestra en la programación, ejecución y resultados de las sesiones de aprendizaje, según anexo 4.

Sugerencias

1. Se sugiere a los profesores de la especialidad de matemáticas aplicar las estrategias con sus aspectos: la autonomía, la autodirección y la autorregulación en la resolución de problemas aritméticos.

2. Los profesores responsables en el área de matemática, con conocimiento sugeridos deben elaborar las sesiones de aprendizaje por actividades para elaborar una abstracción al conducir el diálogo con los alumnos cuando éste enfrenta una situación que le permita ejercitar sus potenciales cognitivos para elevar sus niveles de comprensión de esta área.

3. En las instituciones educativas, se deben considerar en la programación curricular como eje central la teoría de grafos, sus elementos principales y aplicarlos las estrategias con los aspectos precisados en las conclusiones arribadas en la presente investigación.

4. Se deben organizar cursos – talleres sobre la planificación y su utilidad de la teoría de grafos., para la comprensión e interpretación de ejercicios y problemas aritméticos.

Bibliografía

AYRA PICOY, Teodoro y SANTOS GIRÓN, Nelly Chela	Estrategias Didácticas para el Aprendizaje de Contenidos Educativos en Educación Secundaria de Menores; Pasco, Perú, 2002.
ÁVILA ACOSTA R.B.	La Tesis Profesional, Aplicaciones y Ejemplos, Lima, editorial R.A. 1997
AMES, Patricia	"¿Libros para todos? Maestros y textos escolares en el Perú rural" Lima CIES/IEP, 2001.
BING, R.	Topología Conjuntista. En J. Salvat, *Universitas, gran enciclopedia del saber* (págs. 181,182). Barcelona: Salvat, 1984
BRASLAVSKY, Cecilia y otros.	"Perspectivas de Formación Docente". Lima. Ministerio de Educación del Perú- GTZ. 2002.
CONDORI MAMANI, Hugo	Influencia de las Estrategias Metodológicas de Enseñanza y las Técnicas de Estudio utilizados por los alumnos, en el rendimiento académico de curso básico en estudiantes de la U.N.A. – Puno; Puno; Perú 2003.
COURANT R. y ROBBINS H.	¿Qué es la Matemática? Ediciones Aguilar S.A. Quinta Edición, España 1967
DAVIS, Gary y THOMAS, Margaret	"Escuelas eficaces y profesores eficientes". Madrid. Editorial La Muralla, S.A ,1999.
DIKER, Gabriela y TERIGI, Flavio.	"La formación de maestros y profesores: hoja de ruta". Argentina. Paidós, 1997.
ESPINOZA, H.	Conceptos básicos de Topología. Chosica: UNE. Fréchet, M., & Fan, K. (1959). Introducción a la topología combinatoria. Buenos Aires: Eudeba, 1998.

FACULTAD DE EDUCACIÓNUPCH	“Escuelas que aprenden y se desarrollan”. 1er Seminario Internacional para una mejor educación. Lima. Octubre 2001.
GALLEGO, Julio	“Enseñar a pensar en la escuela”. Madrid. Ediciones Pirámide, 2001.
GAMARRA A. Guillermo	Estadística e investigación, Editorial San Marcos, primera edición 2008, Lima Perú
GIBAJA, Regina.	“El trabajo intelectual en la escuela”. Academia Nacional de Educación.
GUEVARA VASQUEZ, Napoleón	Método de aprendizaje basado en problemas y su influencia en el rendimiento académico de los alumnos de la asignatura de física de la especialidad de matemática física de la UNDAC. Pasco, 2007, Perú.
GUTIÉRREZ MERCEDES Virgilio	Matemática (curso de actualización docente). Tomo I, editorial Omega, Lima Perú
IMBERNÓN, Francisco	“La formación del profesorado”. Barcelona. Paidós, 1997.
JONSON Donovan	Explorando la Matemática. Tomo I; mcgraw-hill book company, new york. london
LEITHOLD Louis, ROW Happer	Latinoamericano Harla. Matemáticas previas al cálculo
CARHUACHIN MARCELO, Armando Isaías	Modelo de resolución de problemas y rendimiento académico en matemática y lógica de los alumnos de la facultad de ciencias de la educación y comunicación social de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión – Pasco; 2009.

MONTERO, Carmen — “La escuela rural: modalidades y prioridades de intervención”. Lima. Ministerio de Educación del Perú, 2001.

MONTERO, Carmen — “Propuesta metodológica para el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje en el aula rural”. Lima Ministerio de Educación del Perú, 2002.

PATTERSON, E. (1961) — Topología. Madrid: Dossat S. A.

POZO, Juan Ignacio — “Aprendices y maestros”. Madrid. Alianza Editorial, 1996.

RED LATINOAMERICANA DE INFORMACIÓN Y EDUCACIÓN. — “El aula reformada. Buenas prácticas de actualización y buenas prácticas docentes en cuatro países latinoamericanos”. 2000.

PIZANO CHÁVEZ, Guillermina. — Las estrategias de aprendizaje un avance para lograr el adecuado procesamiento de la información, 2004, Lima Perú.

RIVERO, José. — “Educación y exclusión en América Latina”. Lima. Tarea, 1999.

RUBIÑOS TORRES Luis — Razonamiento Matemático moderno. (1000 problemas resueltos), III milenio, nueva edición, editorial moshera s.r.l. Lima Perú

SCHUNK, Dale — “Teorías del Aprendizaje”. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. Segunda Edición.

SOSA, Nora Mabel SUREDA, Silvia Cristina — *Aplicación de procedimientos heurísticas en la resolución de problemas estadísticos”*; informe de la facultad de Ciencias Económicas. Universidad Nacional de misiones. Catedra de estadística I, Pasco, ciencias económicas, UNDAC.

STACEY Kaye, GROVES Susie — Unidades para Desarrollar el Razonamiento Matemático; resolver problemas: estrategias; editorial Narcea 1999, Madrid España

TORRES, Rosa María y otros — "Nuevas formas de aprenderla teoría de grafos". UNESCO-SANTIAGO. Santiago, Chile, 1996.

TORRES SALCEDO, Víctor — Aplicación de nuevas estrategias metodológicas como recurso didáctico para mejorar el rendimiento académico de los alumnos en la facultad de educación de la UNDAC 2007; Pasco, Perú.

UNESCO — "Nuevas formas de aprender y enseñar los grafos". Seminario Regional "Formas de aprender y nuevas formas de enseñar: demandas a la formación inicial del docente". Santiago de Chile 1995.

VALENTÍN SALVADOR Timoteo — Razonamiento Matemático (siglo XXI). nueva edición, editorial San Marcos

WOOLFOLK, Anita — "Psicología Educativa". PRENTICE HALL. México 1999.

Documentos:

- Martínez Montero Jaime — Series monografías escuela española. editorial cisspraxis, s.a. 2000. Barcelona – España; una nueva didáctica del cálculo para el siglo XXI
- Ministerio de Educación — Nuestra Riqueza Chile, junio del 2003. departamento de estudios y estadísticas
- Ministerio de Desarrollo Humano — guía didáctico; (resolución de problemas matemáticos) la paz Bolivia 1995

- Olano Ernesto — Programa de Capacitación Docente. PUCP. Centros de Investigación y Servicios Educativos. Lima 2002

Revistas:

- Editorial. Grao — Barcelona España. Modelización y Matemática. Revista Didáctica de las Matemáticas N° 31; publicación trimestral 2002
- Lang Serge — Habilidades. volúmen I, addison-wesley publishing company-1973
- Gonzales M. Raúl — La Sistematización de Experiencias una Aproximación Metodológica. Tarea N° 26, 1991
- Ministerio de Educación — Unidad de Medición de la Calidad Educativa. (boletín varios) 2002 a 2003

Página web:

- es.wikipedia.org/wiki/**habilidades y estrategias en la teoría de grafos….**
- apuntesde.com/la-axiomática/del-**razonamiento**-al-**aprendizaje**/
- www.ingeniaste.com/ingenias/.../**habilidades**/**estrategias/grafos/** index.htm
- tublogdeoposiciones.com/.../test-psicotécnico-**habilidades-y-raz**...
- www.milespps.com/33418/**los grafos**-estrategias/numérico/
- ebookbrowse.com/dificultades-**estrategias**-**razonamiento**-lógico...
- www.elclubdelingenio.com.ar/**razonamiento**-y-**habilidades**/
- ariannib.espacioblog.com/tags/**aprendizajes en base a habilidades**-de-inferencias

ANEXO

ANEXO 1

UNIVERSIDAD NACIONAL DANIEL ALCIDES CARRION

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

MATRIZ DE CONSISTENCIA

LA TEORÍA DE GRAFOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS PARA ESTUDIANTES DEL LABORATORIO DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN PEDAGÓGICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DANIEL ALCIDES CARRIÓN DE PASCO - 2014

PROBLEMAS	OBJETIVOS	HIPOTESIS	VARIABLES
GENERAL ¿De qué manera influye la teoría de grafos en la resolución de problemas aritméticos para estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco - 2014?	**GENERAL** Determinar la influencia de la teoría de grafos en la resolución de problemas aritméticos para estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco -2014.	**GENERAL** La utilización adecuada de la teoría de grafos influye positivamente en la resolución de problemas aritméticos para estudiantes del Laboratorio de Investigación e Innovación Pedagógica de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión de Pasco -2014.	**Variable independiente:** La teoría de grafos
ESPECIFICO ¿Cuáles son los fundamentos teóricos y prácticos de la utilización de la teoría de grafos como recurso didáctico en la resolución de problemas aritméticos, en los estudiantes en tratamiento? ¿Cómo se relaciona la teoría de grafos con la resolución de problemas aritméticos para los estudiantes del caso?	**ESPECIFICO** Describir los fundamentos teóricos y prácticos de la utilización de la teoría de grafos como recurso didáctico en la resolución de problemas aritméticos, en los estudiantes en tratamiento. Determinar la relación de la teoría de grafos con la resolución de problemas aritméticos para los estudiantes del caso.	**ESPECIFICO** Los fundamentos teóricos y prácticos de la utilización de la teoría de grafos, por medio de sus fases; son óptimos para el uso en la resolución de problemas aritméticos, en los estudiantes en tratamiento. La teoría de grafos con sus niveles: literal, inferencial y crítico son los organizadores del conocimiento; con estrategias en la resolución de problemas aritméticos para los estudiantes del caso.	**Variable dependiente:** Resolución de problemas aritméticos

ANEXO 2

UNIVERSIDAD NACIONAL DANIEL ALCIDES CARRIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

LABORATORIO DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN PEDAGÓGICA

Variable independiente

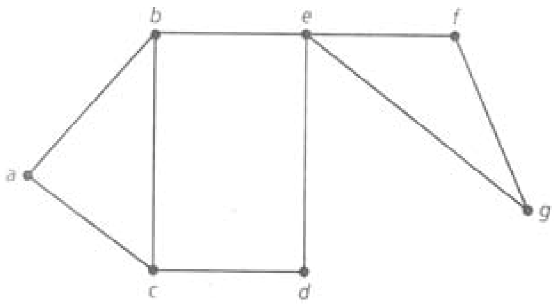
Instrucciones:

- *Responda con todo el procedimiento solicitado cada pregunta en hoja adicional.*
- *Cada pregunta correcta tiene un valor de 10,0 puntos, en proceso 5,0 puntos y 0,0 puntos incorrectos.*
- *Para resolver la presente prueba tiene un tiempo de 45 minutos.*

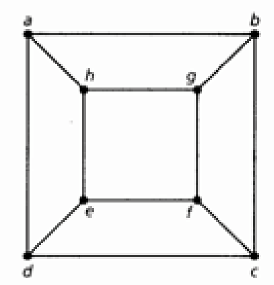
1. Enumera tres situaciones, en que un grafo pueda ser útil.

2. Para el grafo de la figura, determina

a) un camino de b a d que no sea un recorrido;
b) un recorrido b-d que no sea un camino simple;
c) ¿Cuántos caminos simples existen de b a f?

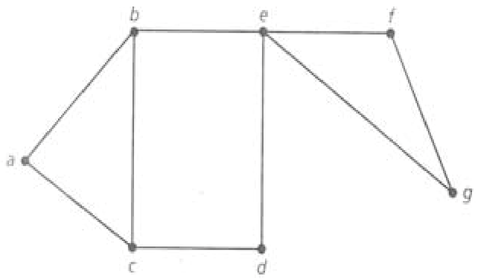


3. ¿Cuántos caminos simples diferentes existen entre los vértices h y c en el grafo dado en la figura?



4. Para el grafo de la figura, determina

a. ¿Cuántos ciclos tiene?, ¿cuáles?
b. Traza un camino simple de g a c

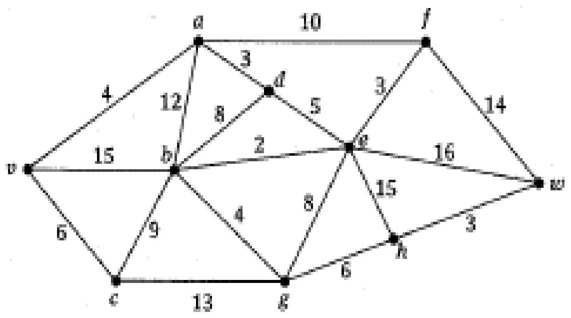


5. Dibuja, si existen, grafos con

a. 5 vértices, 6 aristas y sin ciclos de longitud 3

b. 5 vértices con grados 0, 5, 1, 3 y 2

6. En el siguiente grafo, los números en las aristas representan los kilómetros entre un punto y otro. Encuentra el camino más corto del punto v al punto w



7. Alex, Daniel, Luis y José son postulantes a la Corte Suprema. Cada uno nació en una provincia distinta: Oxapampa, Pasco, Lima y Trujillo. Sus edades son distintas: 52; 55; 58 y 61 años. Daniel es de Oxapampa y nació 3 años antes que Alex, quien tiene 52 años. José no tiene 58 años y no es ni de Pasco ni de Lima. El que tiene 58 años es de Lima. ¿Dónde nació José y cuál es su edad?

8. Tres amigos tienen 12; 15 y 20 años de edad. Cada uno es hincha de Alianza, Cristal y Universitario. Sí el más joven es hincha de Alianza; Beto y Dante vieron el clásico Alianza - Universitario en el estadio Nacional; Armando es mayor de 15 años. Dante se alegró cuando Universitario metió un gol. ¿Qué edad e hincha de qué equipo es cada uno?

9. En una reunión se encontraron dos padres y dos hijos y 1 nieto. ¿Cuántas personas como mínimo se encuentran en dicha reunión?

10. Tres adultos y dos jóvenes tienen que cruzar un río en una canoa; en cada viaje puede ir uno de los adultos o dos de los jóvenes, pero no un adulto y un joven a la vez. ¿Cuál es el mínimo número de veces que la canoa tiene que cruzar el río, en cualquier sentido, para que pasen todos?

ANEXO 3

UNIVERSIDAD NACIONAL DANIEL ALCIDES CARRIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

LABORATORIO DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN PEDAGÓGICA

Variable dependiente

Instrucciones:

- *Responda cada pregunta marcando solamente una de las alternativas en la ficha de respuestas.*
- *Cada pregunta correcta tiene un valor de 10,0 puntos y por cada pregunta incorrecta y/o en blanco tiene un valor de 0,0 puntos.*
- *Para resolver la presente prueba tiene un tiempo de 45 minutos.*

1. Lourdes, Mercedes, Paulina y Susana han aprobado el examen y salen a Celebrar. Para tomar hay ron, tequila, vino y vodka. Para evitar las mezclas, cada una sólo toma una clase de licor, que además es distinta a la de las otras. Lourdes no tomó ni vodka ni ron. Mercedes tampoco tomó ron, y Paulina tomó vino. ¿Con qué celebró Susana?
a) Ron b) Tequila c) Vino d) Vodka c) Cerveza

2. En un edificio de 5 pisos viven las familias: Flores, Gonzáles, Miranda, López y Rodríguez, cada una en pisos diferentes:

Si se sabe que:

- Los Rodríguez viven sobre los Gonzáles.
- Los Flores viven lo más lejano del Miranda.
- Los Miranda ni puede subir las escaleras.
- Los López hubieran preferido vivir en el último piso.

Se deduce que:

a) Los López viven en el segundo piso.
b) Los Rodríguez no viven en el segundo piso.
c) Los Flores viven en el segundo piso.
d) Los Rodríguez viven en el segundo piso.
e) Los González viven en el tercer piso.

3. Después de realizar una carrera con sus bicicletas, tres niños conversan: Nano le dice al de la bicicleta roja que la próxima vez le volverá a ganar. Nico que fue en la bicicleta amarilla, felicitó al de la bicicleta verde por vencerlos, Edy llegó después de la bicicleta amarilla. ¿Quién llegó 1er, 2$^{do.}$ y 3er lugar respectivamente?.

a) Nico, Nano y Edy
b) Nano, Edy y Nico.
c) Nano, Nico y Edy.
d) Nico, Edy y Nano.
e) Edy, Nico y Nano.

4. Seis amigas de la infancia se reúnen en una heladería sentándose en una mesa circular. Si se sabe que:

i. Claudia se sienta al frente de la que estudia turismo y entre Juana y la estudiante de enfermería.
ii. Ana se sienta junto a Kelly y a la que estudia contabilidad.
iii. Betty que estudia ingeniería está al frente de la que estudia contabilidad.
iv. La estudiante de medicina está a la izquierda de la estudiante de contabilidad, y a la derecha de la que estudia ciencias de la comunicación está la que estudia turismo.

¿Qué estudia María y quién se sienta junto a su derecha?

a) Enfermería - Ana
b) Contabilidad - Juana
c) Enfermería – Claudia
d) Turismo - Betty
e) Medicina - Kelly.

5. En una repisa se encuentran 5 obras de literatura, cuyos títulos son: Raíces, Sandokan, Gato Pardo, Principito y Topaz, aunque no necesariamente en ese orden.

Se sabe que:

- ✓ El libro de Sandokan se encuentra a la izquierda y junto del libro de Gato Pardo.
- ✓ El libro de Raíces se encuentra a la derecha del libro de Topaz.
- ✓ El libro de Principito se encuentra a la derecha de todos y el libro de Gato Pardo es el intermedio de los extremos.

Un posible orden de derecha a izquierda es:

a) Principito, Topaz, Gato Pardo, Raíces y Sandokan.
b) Principito, Sandokan, Gato Pardo, Raíces y Topaz.
c) Topaz, Sandokan, Gato Pardo, Raíces y Principito.
d) Principito, Raíces, Gato Pardo, Topaz y Sandokan.
e) Topaz, Principito, Gato Pardo, Sandokan y Raíces.

6. Cuatro sospechosos: Antonio, Benito, Carlos y Daniel son interrogados en la escena de un crimen:

- Antonio: “Benito cometió el asesinato”.
- Benito: “Daniel cometió el asesinato”.
- Carlos: “Yo no cometí el asesinato”.
- Daniel: “Benito miente”.

Si sólo uno de los cuatro dijo la verdad, ¿quién cometió el asesinato?

a) Antonio b) Benito c) Carlos d) Daniel e) Faltan datos

7. Se tiene seis libros: Química, física, matemática, literatura, historia y geografía.
Si se sabe que:

i. El libro de matemática está siempre junto a la izquierda del de literatura.

ii. El libro de física está a la derecha del libro de matemática y a la izquierda del de historia.

iii. El libro de historia está siempre junto y a la izquierda del de geografía.

iv. El libro de química está a la izquierda de literatura.

¿Qué libro ocupa el cuarto lugar a partir del primer libro de la izquierda?

a) Física b) Química c) Literatura d) Historia e) Matemática

8. Si el ayer del mañana del ayer de anteayer del pasado mañana de mañana de ayer de mañana de ayer de mañana de anteayer de pasado mañana es lunes. ¿Qué día es el ayer del ayer del ayer de pasado mañana de mañana?

9. En una familia están presentes 2 abuelos, 2 abuelas, 3 padres, 3 madres, 2 hijos, 1 hija, 2 suegras, 2 suegros, 1 yerno, 1 nuera, 1 nieto. ¿Cuántas personas se encuentran como mínimo?

a) 10 b) 9 c) 11 d) 8 e) 7

10. En un poblado donde se utiliza el trueque se tiene las siguientes equivalencias de cambio:

- Un collar y un anillo se cambian por un reloj
- Un reloj se cambia por tres aretes
- Dos anillos se cambian por tres aretes

¿Cuántos anillos equivale un reloj?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

ANEXO 4
SESIÓN DE APRENDIZAJE
(ACTIVIDAD N° 01)

I. DATOS INFORMATIVOS:

1.1. UNIDAD : Evolución de la matemática
1.2. GRUPO : Alfa - Beta
1.3. NIVEL : Intermedio
1.4. DOCENTE : Romel Félix Capcha Ventura
1.5. DURACIÓN : 3 horas
1.6. FECHA : 08 de abril de 2014
1.7. TEMA : Los grafos

II. APRENDIZAJE ESPERADO:

Interpreta situaciones problemáticas aplicando las definiciones y procedimientos de los grafos

III. DESARROLLO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE:

CONTENIDO	MOMENTOS	ACTIVIDADES	RECURSOS	ESTRATEGIAS
Los grafos	**INICIO**	♦ Se hace la presentación de los fundamentos históricos. ♦ Se recoge los saberes previos mediante ejemplos de la realidad. • Resuelven problemas relevantes, propiciando la alfabetización matemática, para los grafos y la aplicación a situaciones del contexto. • Se genera el conflicto cognitivo a través de preguntas • Declaración del aprendizaje esperado.	♦ Expresión oral. ♦ Pizarra ♦ Plumones	(20 minutos) Autonomía Autodirección
	PROCESO	♦ Resuelven situaciones problemáticas de las lecciones, conforme lo solicitado en la actividad uno. ♦ Taller de la actividad uno por equipo de trabajo. ♦ El docente consolida y resume el trabajo realizado por los equipos de trabajo. ♦ Solución de ejercicios y problemas del banco de preguntas.	♦ Pizarra ♦ expresión oral ♦ Lecciones ♦ Banco de preguntas ♦ Multimedia y texto ♦ Plumones	(280 minutos) Autonomía Autodirección

				Autorregulación
	SALIDA	➢ Se asigna la autoevaluación de acuerdo con la actividad uno contextualizando el entorno de los estudiantes y lo desarrollen.	▪ Lecciones ▪ Textos impresos	(20 minutos) Autorregulación

IV. EVALUACIÓN

Indicador	Técnica	Instrumento
▪ Resuelve situaciones problemáticas aplicando conceptos, procedimientos de los grafos	• **SEMIFORMALES** Práctica calificada	▪ Banco de preguntas ▪ Prueba de ensayo ▪ Postest

V. BIBLIOGRAFÍA

✓ CARRANZA, C.; Kong, M. *Teoría de conjuntos y números naturales*. Perú Offset. Lima, 1980.
✓ CARRANZA, C.; Agapito, V.; CASTILLO, P. y VELIZ, C. *Matemática básica*: Servicio Copias Gráficas. S. A. Lima, 1996.
✓ CHAVEZ VEGA, C. Matemática básica. Editorial San Marcos. Lima Perú, 1993.
✓ GENTILE, E; Aritmética elemental. Serie de Matemáticas. Monografía de la OEA, 1985.
✓ PETROFEZZO A. J., BYRKIt D. R.; Introducción a la teoría de números. Prentice Hall. U.S.A, 1970.

ENLACES WEB

1- http://ciberdocencia.gob.pe
2.- http://es.wikipedia.org
3.- http://platea.pntic.mec.es
4.- http://recursos.pnte.cfnavarra.es

SESIÓN DE APRENDIZAJE
(ACTIVIDAD N° 02)

I. DATOS INFORMATIVOS:

1.1. UNIDAD : Evolución de la matemática
1.2. GRUPO : Alfa - Beta
1.3. NIVEL : Intermedio
1.4. DOCENTE : Romel Félix Capcha Ventura
1.5. DURACIÓN : 3 horas
1.6. FECHA : 15 de abril de 2014
1.7. TEMA : Leonhard Euler y la teoría de grafos

II. APRENDIZAJE ESPERADO:

Interpreta proceso constructivo e histórico de Leonhard Euler y la teoría de grafos

III. DESARROLLO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE:

CONTENIDO	MOMENTOS	ACTIVIDADES	RECURSOS	ESTRATEGIAS
Leonhard Euler y la teoría de grafos	**INICIO**	♦ Se hace la presentación de los fundamentos históricos. ♦ Se recoge los saberes previos mediante ejemplos de la realidad. • Se genera el conflicto cognitivo a través de preguntas • Declaración del aprendizaje esperado.	♦ Expresión oral. ♦ Pizarra ♦ Plumones ♦ Multimedia y lecciones	(20 minutos) Autonomía Autodirección
	PROCESO	♦ Critican situaciones problemáticas de las lecciones, conforme lo solicitado en la actividad dos. ♦ Taller de la actividad dos por equipo de trabajo. ♦ El docente consolida, resume y realiza el debate del trabajo realizado por los equipos de trabajo. ♦ Conclusión publica de las relaciones.	♦ Pizarra ♦ expresión oral ♦ Lecciones ♦ Banco de preguntas ♦ Multimedia y texto ♦ Plumones	(280 minutos) Autonomía Autodirección Autorregulación

	SALIDA	➢ Se asigna la autoevaluación de acuerdo con la actividad uno contextualizando el entorno de los estudiantes y lo desarrollen.	▪ Lecciones ▪ Textos impresos	(20 minutos) Autorregulación

IV: EVALUACIÓN

Indicador	Técnica	Instrumento
Interpretan las situaciones relacionantes de Leonhard Euler y la teoría de grafos	• **SEMIFORMALES** Práctica calificada	▪ Lección ▪ Banco de preguntas ▪ Prueba de ensayo ▪ Postest

VI. BIBLIOGRAFÍA

✓ CARRANZA, C.; Kong, M. *Teoría de conjuntos y números naturales*. Perú Offset. Lima, 1980.
✓ CARRANZA, C.; Agapito, V.; CASTILLO, P. y VELIZ, C. *Matemática básica*: Servicio Copias Gráficas. S. A. Lima, 1996.
✓ CHAVEZ VEGA, C. Matemática básica. Editorial San Marcos. Lima Perú, 1993.
✓ GENTILE, E; Aritmética elemental. Serie de Matemáticas. Monografía de la OEA, 1985.
✓ PETROFEZZO A. J., BYRKIt D. R.; Introducción a la teoría de números. Prentice Hall. U.S.A, 1970.

ENLACES WEB

1- http://ciberdocencia.gob.pe
2.- http://es.wikipedia.org
3.- http://platea.pntic.mec.es
4.- http://recursos.pnte.cfnavarra.es

SESIÓN DE APRENDIZAJE
(ACTIVIDAD N° 03)

I. DATOS INFORMATIVOS:

11.1. UNIDAD : Evolución de la matemática
1.2. GRUPO : Alfa - Beta
1.3. NIVEL : Intermedio
1.4. DOCENTE : Romel Félix Capcha Ventura
1.5. DURACIÓN : 3 horas
1.6. FECHA : 22 de abril de 2014
1.7. TEMA : Conceptos previos y terminología

II. APRENDIZAJE ESPERADO:

Interpreta los conceptos previos y terminología de los grafos y los símbolos aplicando ejemplos del entorno

III. DESARROLLO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE

CONTENIDO	MOMENTOS	ACTIVIDADES	RECURSOS	ESTRATEGIAS
Conceptos previos y terminología	**INICIO**	♦ Dinámica a través de “mar adentro mar afuera ” Reflexión colectiva sobre la dinámica. • Activación de los saberes previos a través de la técnica lluvia de ideas. • Se genera el conflicto cognitivo a través de una pregunta • Declaración del aprendizaje esperado	♦ Pizarra ♦ expresión oral ♦ Plumones	(20 minutos) Autonomía Autodirección
	PROCESO	♦ Resuelven situaciones problemáticas de las lecciones. ♦ Taller de resolución de problemas por equipos de trabajo de la actividad tres A y B de la lección, luego problemas del banco de preguntas.	♦ Pizarra, expresión oral ♦ Lecciones ♦ Banco de preguntas ♦ Multimedia y texto ♦ Plumones	(280 minutos) Autonomía Autodirección Autorregulación

	SALIDA	• Se realiza la metacognición haciendo preguntas como: ¿Qué aprendimos?, ¿Cómo lo aprendimos?, ¿Para qué nos sirve lo que aprendimos? • Se aplica el instrumento de evaluación para comprobar la calidad de los aprendizajes de la unidad.	• Lecciones • Hojas de papel	(20 minutos) Autorregulación

IV. EVALUACIÓN

Indicador	Técnica	Instrumento
▪ Resuelve situaciones problemáticas aplicando conceptos previos, terminología y los símbolos con sus procedimientos	• **SEMIFORMALES** Ejercicios y prácticas	▪ Banco de preguntas ▪ Prueba de ejecución ▪ Postest

V. BIBLIOGRAFÍA

ASTRUA PÍVOT, Sergio, Iniciación a la topología moderna, TECNOS, 1983. Lima.
AGAZZI, Evandro, La topología simbólica, Editorial Herder, Barcelona -1967
BARREIRO DE NUDLER, Telma: Elementos de la topología simbólica. Editorial Kapelusz, 1973
CARRANZA, C.; Kong, M.: Teoría de conjuntos y números naturales. Perú Offset. Lima, 1980.
DIENES, Z. P.; GOLDING, E. W. topología y juegos lógicos. Editorial Teide, Barcelona, 1976.

Enlaces Web:

- http://ciberdocencia.gob.pe
- http://es.wikipedia.org
- http://platea.pntic.mec.es
- http://recursos.pnte.cfnavarra.es

SESIÓN DE APRENDIZAJE
(ACTIVIDAD N° 04)

I. DATOS INFORMATIVOS:

1.1. UNIDAD : Evolución de la matemática
1.2. GRUPO : Alfa - Beta
1.3. NIVEL : Intermedio
1.4. DOCENTE : Romel Félix Capcha Ventura
1.5. DURACIÓN : 3 horas
1.6. FECHA : 29 de abril de 2014
1.7. TEMA : Subgrafos

APRENDIZAJE ESPERADO:

Interpreta y aplica los subgrafos en la solución de ejercicios propuestos.

II. DESARROLLO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE

CONTENIDO	MOMENTOS	ACTIVIDADES	RECURSOS	ESTRATEGIAS
Subgrafos	**INICIO**	♦ Dinámica a través de "juzgando al inocente " Reflexión colectiva sobre la dinámica. • Activación de los saberes previos a través de la técnica autodireccionada. • Se genera el conflicto cognitivo a través de una pregunta • Declaración del aprendizaje esperado	♦ Pizarra ♦ expresión oral ♦ Plumones	(20 minutos) Autonomía Autodirección
	PROCESO	♦ Resuelven situaciones problemáticas de las sesiones. ♦ Taller en la resolución de problemas por equipos de trabajo de la actividad cuatro presentados en la sesión y luego en banco de preguntas. ♦ El docente solicita la participación activa autorregulada a cada integrante.	♦ Pizarra, expresión oral ♦ Lecciones ♦ Banco de preguntas ♦ Multimedia y texto ♦ Plumones	(280 minutos) Autonomía Autodirección Autorregulación

	SALIDA	• Se realiza la meta cognición haciendo interrogantes sobre la temática tratada utilizando problemas planteados en el banco de preguntas. • Se aplica el instrumento de evaluación para comprobar la calidad de los aprendizajes de la unidad.	• Lecciones • Hojas de papel	(20 minutos) Autorregulación

III. EVALUACIÓN

Indicador	Técnica	Instrumento
▪ Resuelve ejercicios y problemas aplicando teoremas y sus procedimientos de subgrafos	• **SEMIFORMALES** Ejercicios y prácticas	▪ Banco de preguntas ▪ Prueba de ejecución ▪ Postest

IV. BIBLIOGRAFÍA

ASTRUA PÍVOT, Sergio, Iniciación a la topología moderna, TECNOS, 1983. Lima.

AGAZZI, Evandro, La topología simbólica, Editorial Herder, Barcelona -1967

BARREIRO DE NUDLER, Telma: Elementos de la topología simbólica. Editorial Kapelusz, 1973

CARRANZA, C.; Kong, M.: Teoría de conjuntos y números naturales. Perú Offset. Lima, 1980.

DIENES, Z. P.; GOLDING, E. W. Topología y juegos lógicos. Editorial Teide, Barcelona, 1976.

Enlaces Web:

- http://ciberdocencia.gob.pe
- http://es.wikipedia.org
- http://platea.pntic.mec.es
- http://recursos.pnte.cfnavarra.es

SESIÓN DE APRENDIZAJE
(ACTIVIDAD N° 05)

I. DATOS INFORMATIVOS:

1.1. UNIDAD : Evolución de la matemática
1.2. GRUPO : Alfa - Beta
1.3. NIVEL : Intermedio
1.4. DOCENTE : Romel Félix Capcha Ventura
1.5. DURACIÓN : 3 horas
1.6. FECHA : 08 de mayo de 2014
1.7. TEMA : Ejemplos de problemas en la teoría de grafos

II. APRENDIZAJE ESPERADO:

Realiza la aplicación teórica de grafos para la solución de ejercicios y problemas del entorno.

III. DESARROLLO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE:

CONTENIDO	MOMENTOS	ACTIVIDADES	RECURSOS	ESTRATEGIAS
Ejemplos de problemas en la teoría de grafos	**INICIO**	▪ Dinámica motivacional, "la división justa y perfecta" ▪ Activación de los saberes previos a través de la lluvia de ideas. ▪ Se genera el conflicto cognitivo a través de una pregunta ▪ Declaración del aprendizaje esperado.	▪ Expresión oral ▪ Multimedia ▪ Lección	(30 minutos) Autonomía Autodirección
	PROCESO	▪ Resuelven situaciones problemáticas presentadas en las sesiones. ▪ Monitoreo y validación del proceso en la resolución de problemas. ▪ Taller de interpretación de las actividades.	▪ Lecciones ▪ Pizarra ▪ Multimedia ▪ Plumones ▪ Textos impresos	(125 minutos) Autonomía Autodirección Autorregulación
	SALIDA	▪ Se asigna la autoevaluación, como mapa conceptual para que los estudiantes lo elaboren.	▪ Lecciones ▪ Textos impresos	(25 minutos) Autorregulación

IV. EVALUACIÓN

Indicador	Técnica	Instrumento
▪ Realiza la solución de ejercicios y problemas de la teoría de grafos e interpretando los tipos de operaciones con ejemplos del entorno.	• **SEMIFORMALES** Prueba escrita	▪ Banco de preguntas ▪ Prueba objetiva ▪ Postest

V. BIBLIOGRAFÍA:

- ✓ LUIS FARFAN ALARCON (2003). Aritmética. Editorial San Marcos. Perú
- ✓ PROYECTO INGENIO (2005) Aritmética. Editorial Ingenio. Perú
- ✓ COLECCIÓN ADUNI (2005) Aritmética Editorial Lumbreras. Perú
- ✓ VOROBIOB (1984) Criterio de particionamiento. Editorial MIR . Moscú
- ✓ SOMIN (1987) topología general. Editorial Lecciones Populares MIR. Moscú
- ✓ ANÁLISIS DE GRAFICOS Y SUS APLICACIONES. (2000) Editorial Lumbreras. Perú

SESIÓN DE APRENDIZAJE
(ACTIVIDAD N° 06)

I. DATOS INFORMATIVOS:

- **1.1. UNIDAD** : Evolución de la matemática
- **1.2. GRUPO** : Alfa - Beta
- **1.3. NIVEL** : Intermedio
- **1.4. DOCENTE** : Romel Félix Capcha Ventura
- **1.5. DURACIÓN** : 3 horas
- **1.6. FECHA** : 13 de mayo de 2014
- **1.7. TEMA** : Demostración de algunos teoremas

II. APRENDIZAJE ESPERADO:

Demuestra e interpreta teoremas de la teoría de grafos y lo relaciona con el entorno.

III. DESARROLLO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE

CONTENIDO	MOMENTOS	ACTIVIDADES	RECURSOS	ESTRATEGIAS
Demostración de algunos teoremas	**INICIO**	▪ Presentación y comentario sobre teoremas de la teoría de grafos. ▪ Activación de los saberes previos a través de la lluvia de ideas. ▪ Se genera el conflicto cognitivo a través de una pregunta. ▪ Declaración del aprendizaje esperado.	▪ Expresión oral ▪ Pizarra ▪ Plumones ▪ Multimedia	(30 minutos) Autonomía Autodirección
	PROCESO	▪ Realiza una exposición sobre la información teórica según la lección y su actividad. ▪ Monitoreo y validación del proceso.	▪ Lecciones ▪ Pizarra ▪ Multimedia ▪ Plumones ▪ Textos impresos	(125 minutos) Autonomía Autodirección Autorregulación

	SALIDA	▪ Se asigna la autoevaluación de acuerdo al plan programado.	▪ Lecciones ▪ Textos impresos	(25 minutos) Autorregulación

IV. EVALUACIÓN

Indicador	Técnica	Instrumento
▪ Aplica los teoremas de la teoría de grafos, en la resolución de problemas matemáticos presentados en el banco de preguntas.	• **SEMIFORMALES** Ejercicios y prácticas	▪ Banco de preguntas ▪ Prueba de ejecución ▪ Postest

V. BIBLIOGRAFÍA:

✓ LUIS FARFAN ALARCON (2003). Aritmética. Editorial San Marcos. Perú
✓ PROYECTO INGENIO (2005) Aritmética. Editorial Ingenio. Perú
✓ COLECCIÓN ADUNI (2005) Aritmética Editorial Lumbreras. Perú
✓ VOROBIOB (1984) Criterio de Divisibilidad. Editorial MIR. Moscú
✓ SOMIN (1987) Sistema de Numeración. Editorial Lecciones Populares MIR. Moscú
✓ ANALISIS DEL NÚMERO Y SUS APLICACIONES. (2000) Editorial Lumbreras. Perú

SESIÓN DE APRENDIZAJE
(ACTIVIDAD N° 08)

I. DATOS INFORMATIVOS:

11.1. UNIDAD : Evolución de la matemática
1.2. GRUPO : Alfa - Beta
1.3. NIVEL : Intermedio
1.4. DOCENTE : Romel Félix Capcha Ventura
1.5. DURACIÓN : 3 horas
1.6. FECHA : 10 de junio de 2014
1.7. TEMA : Resolución de problemas aritméticos.

II. APRENDIZAJE ESPERADO:

Analiza y resuelve problemas aritméticos proponiendo ejemplos de razonamiento inductivo deductivo, llegando a una conclusión.

III. DESARROLLO DEL PROCESO DE APRENDIZAJE:

CONTENIDO	MOMENTOS	ACTIVIDADES	RECURSOS	ESTRATEGIAS
Resolución de problemas aritméticos	**INICIO**	♦ Dinámica a través de "Dijimos que estaba bien" Reflexión colectiva sobre la dinámica. ♦ Se recoge los saberes previos mediante ejemplos de la realidad. ♦ Se genera el conflicto cognitivo a través de una pregunta ♦ Declaración del aprendizaje esperado	▪ Multimedia ▪ Expresión oral. ▪ Pizarra	(20 minutos) Autonomía Autodirección
	PROCESO	▪ Resuelven situaciones planteadas en la actividad de la lección. ▪ Trabajo individual de la actividad. ▪ El docente consolida y resume el trabajo realizado en forma individual.	▪ Pizarra ▪ Expresión oral ▪ Lecciones ▪ Multimedia	(140 minutos) Autonomía Autodirección Autorregulación

	SALIDA	▪ Se asigna un trabajo para la formulación de problemas de acuerdo a los contenidos contextualizando el entorno de los participantes y lo desarrollen según la autoevaluación. ▪ Los estudiantes y el docente realizan la metacognición a través de la técnica heurística.	▪ Lección ▪ Textos impresos	(20 minutos) Autorregulación

IV. EVALUACIÓN

Indicador	**Técnica**	**Instrumento**
▪ Resuelve situaciones problemáticas aplicando conceptos, procedimientos de razonamiento inductivo deductivo en la resolución de problemas aritméticos.	• **SEMIFORMALES** Práctica calificada	▪ Banco de preguntas ▪ Prueba de ensayo ▪ Pos test

V. BIBLIOGRAFÍA

✓ CARRANZA, C.; Kong, M. *Teoría de conjuntos y números naturales*. Perú Offset. Lima, 1980.
✓ CARRANZA, C.; Agapito, V.; CASTILLO, P. y VELIZ, C. *Matemática básica*: Servicio Copias Gráficas. S. A. Lima, 1996.
✓ CHAVEZ VEGA, C. Matemática básica. Editorial San Marcos. Lima Perú, 1993.
✓ GENTILE, E; Aritmética elemental. Serie de Matemáticas. Monografía de la OEA, 1985.
✓ PETROFEZZO A. J., BYRKIt D. R.; Introducción a la teoría de números. Prentice Hall. U.S.A, 1970.

ENLACES WEB

1- http://ciberdocencia.gob.pe
2.- http://es.wikipedia.org
3.- http://platea.pntic.mec.es
4.- http://recursos.pnte.cfnavarra.es

ANEXO 5

UNIVERSIDAD NACIONAL DANIEL ALCIDES CARRIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

LABORATORIO DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN PEDAGÓGICA

Promedios de los estudiantes según variable

Estudiante	Independiente	Dependiente		
1	8	10	-219,373	-312,743
2	13	15	-,16250	-,15150
3	14	15	,24375	-,15150
4	15	16	,65000	,44368
5	12	14	-,56875	-,74669
6	13	15	-,16250	-,15150
7	14	16	,24375	,44368
8	15	16	,65000	,44368
9	9	16	-178,749	,44368
10	10	17	-138,124	103,887
11	10	17	-138,124	103,887
12	12	17	-,56875	103,887
13	12	16	-,56875	,44368
14	13	15	-,16250	-,15150
15	14	16	,24375	,44368
16	15	15	,65000	-,15150
17	16	16	105,624	,44368
18	15	16	,65000	,44368
19	14	15	,24375	-,15150
20	15	16	,65000	,44368
21	15	16	,65000	,44368
22	15	16	,65000	,44368
23	16	15	105,624	-,15150
24	15	16	,65000	,44368
25	14	15	,24375	-,15150
26	12	16	-,56875	,44368
27	13	14	-,16250	-,74669
28	12	15	-,56875	-,15150
29	13	15	-,16250	-,15150
30	10	14	-138,124	-,74669
31	10	15	-138,124	-,15150
32	9	16	-178,749	,44368
33	9	12	-178,749	-193,706
34	9	12	-178,749	-193,706
35	8	10	-219,373	-312,743

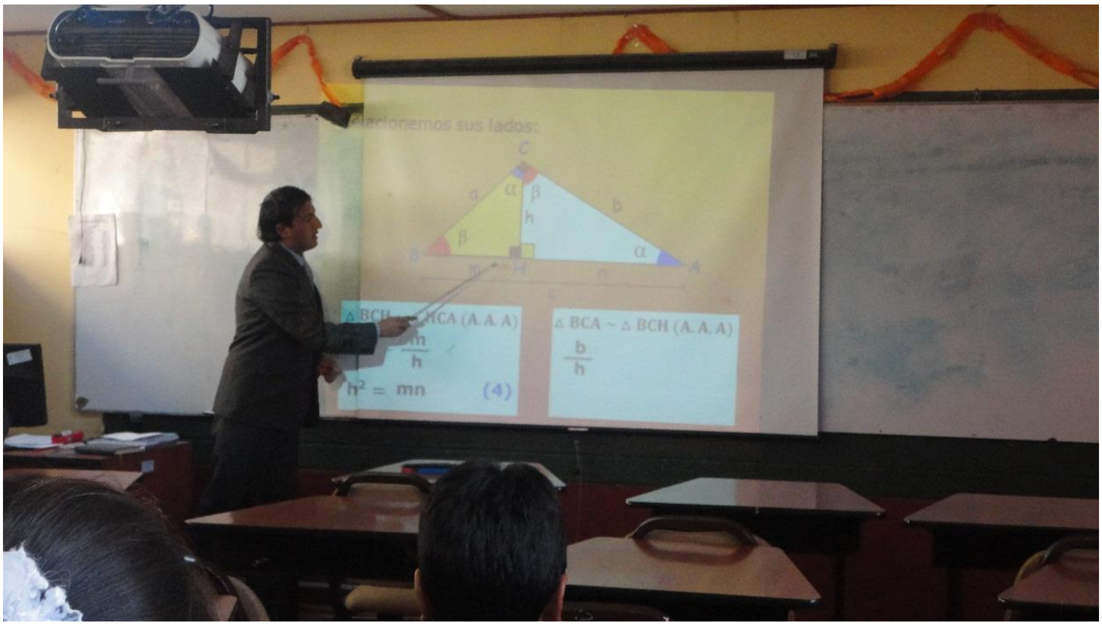
36	10	10	-138,124	-312,743
37	13	13	-,16250	-134,187
38	15	16	,65000	,44368
39	14	15	,24375	-,15150
40	14	15	,24375	-,15150
41	16	16	105,624	,44368
42	16	16	105,624	,44368
43	16	16	105,624	,44368
44	17	16	146,249	,44368
45	17	17	146,249	103,887
46	17	17	146,249	103,887
47	16	17	105,624	103,887
48	16	17	105,624	103,887
49	15	17	,65000	103,887
50	15	16	,65000	,44368
51	14	16	,24375	,44368
52	13	15	-,16250	-,15150
53	14	16	,24375	,44368
54	15	16	,65000	,44368
55	15	16	,65000	,44368

ANEXO 6

UNIVERSIDAD NACIONAL DANIEL ALCIDES CARRIÓN
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

LABORATORIO DE INVESTIGACIÓN E INNOVACIÓN PEDAGÓGICA

Evidencias fotográficas



Presentando una de las actividades

Presentando una de las actividades

Estudiantes de la muestra en plena investigación temática

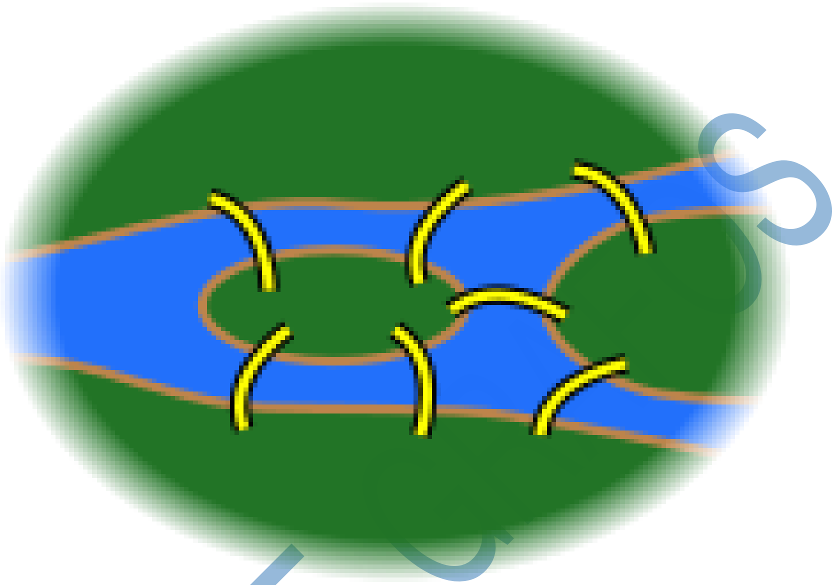
Estudiantes en plena autorregulación

Estudiantes en plena autodirección

Estudiantes en plena autonomía

UNIVERSIDAD NACIONAL DANIEL ALCIDES CARRION
Facultad de ciencias de la educación

Escuela de Formación Profesional de Educación secundaria
Laboratorio de investigación e innovación pedagógica



TEORÍA DE GRAFOS

(Lecciones)

AUTOR: Romel Félix CAPCHA VENTURA

ASESOR: *Dr. Armando Carhuachin Marcelo*

CERRO DE PASCO - 2014

RECOMENDACIONES

4. Comunica por escrito y/o oral cualquier dificultad en tu aprendizaje.

3. No pases de una actividad a otra, sin haber cumplido lo anterior

2. Lee detenidamente las actividades para el cumplimiento de tu aprendizaje, desarrolle el banco de preguntas.

1. Tienes Usted un instrumento de trabajo que te ayudará a conocer la teoría de grafos.

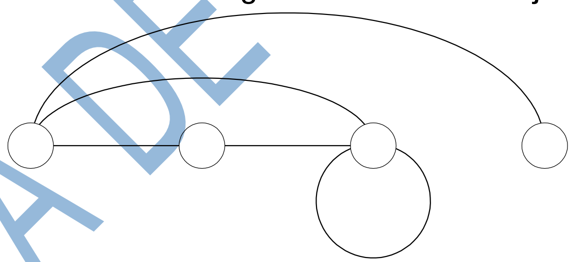
ACTIVIDAD UNO

Lee comprensivamente el siguiente texto, aplicando la técnica del subrayado, dinamizada con el banco de preguntas.

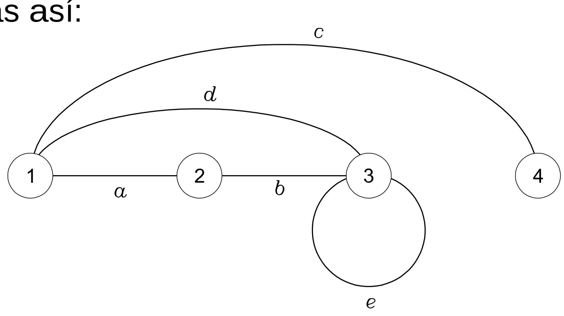
Grafos: En una red de comunicación, no es necesario que toda estación pueda comunicarse directa- mente con otra, puesto que las estaciones pueden actuar de posta para un mensaje entre otras dos estaciones. Si una estación, o una línea de datos, deja de funcionar, queremos saber si la red queda conexa, es decir, si todas las estaciones que siguen funcionando pueden comunicarse entre sí. Para preguntas como ésta, no nos interesa la ubicación física de las estaciones, sino sólo su conectividad, y es así que surge la noción matemática de grafo, que es simplemente unos nodos con algunas conexiones que se llaman aristas. Una arista puede conectar dos nodos, o, como en algunas aplicaciones, un nodo consigo mismo. Una arista está anclada en sus dos extremos a nodos, o posiblemente al mismo nodo en los dos extremos. Formalmente:

Definición Un grafo es (N, A, P) donde N es un conjunto de nodos, A es un conjunto de aristas, y P es una función de las aristas tal que cada P (a) = {p, q} donde p, q son nodos (posiblemente con p = q, así que podemos decir que P (a) es un conjunto de 1 o 2 elementos). Cuando G es un grafo, G_N denota sus nodos, G_A sus aristas, y G_P su función de aristas.

Generalmente pensamos en un grafo como un dibujo:



Pero es difícil hacer algoritmos sobre dibujos. Si ponemos nombres a los nodos y a las aristas así:



Este dibujo corresponde al grafo G en donde G_N = {1, 2, 3, 4}, G_A = {a, b, c, d, e}, P (a) = {1, 2}, P (b) = {2, 3}, P (c) = {1, 4}, P (d) = {1, 3}, P (e) = {3}. Claro que la representación formal es medio engorrosa, pero lo que importa ahora es el concepto, y buscamos estructuras de datos más limpias después.

ACTIVIDAD DOS

Luego de la lectura la actividad 1, ingrese al debate con tus compañeros con la ayuda del tutor

PARA EL DEBATE

1. ¿Quiénes ampliaron la teoría de grafos?
2. En qué siglo comienza la teoría de grafos
3. ¿Cuál es la estructura del pensamiento?
4. ¿Quién es el fundador de esta teoría?
5. Construya un ejemplo real y objetivo

RESUMEN

ACTIVIDAD TRES

Interprete la definición relacional y de ejemplos

Definición: Para una función **f** con dominio D, con valores en el conjunto U, y dos objetos x e y, **f** $(x \rightarrow y)$ es la función g cuyo dominio es $D \cup \{x\}$ con $g(x) = y$, y para todo $z = x$ en D, $g(z) = \mathbf{f}(z)$.

Ahora podemos escribir el algoritmo para el camino del nodo p al nodo q en el grafo G. El subalgoritmo extender va construyendo una función portador que da para cada nodo **r** encontrado, salvo p, el nodo predecesor de **r** que hizo entrar a su vecino **r**. El valor final de portador, el que se forma cuando por fin el nodo destino q se encuentra, junto con q es suficiente para que el subalgoritmo construir construya el camino de p a q:

camino(G, p, q) =
  si (p = q) el camino vacío
  sino extender(G, {p}, función vacía, q)
donde
extender(G, C, portador, q) =
  si hay arista a con P (a) = {s, r} donde **r** $\in$ C y s $\notin$ C
    si (s = q) construir(q, portador($q \rightarrow a$))
    sino extender(G, C $\cup$ {s}, portador($s \rightarrow a$), q)
y donde
construir(q, portador) =
  si existe a tal que portador(q) = a
    sea p $\in$ P (a) $-$ {q}
    construir(p, portador)a
  sino {}

La alternativa de "si hay" no se da; el algoritmo en ese caso no produce nada, falla. ¿Quiere decir que la computadora que lo implementa se va a colgar? No, no más que una persona que ejecuta el algoritmo se va a colgar, en lugar de informar gentilmente que el algoritmo falló.
Este algoritmo, basado en conexos, también es no determinista. En este caso su no deter- minismo es más importante porque afecta el resultado en caso de que haya más de un camino entre p y q. Siempre produce un camino cuando hay, pero cuál produce depende de cómo se hacen las elecciones que se ofrecen.

Resuelva los problemas que te presentamos en las diapositivas.

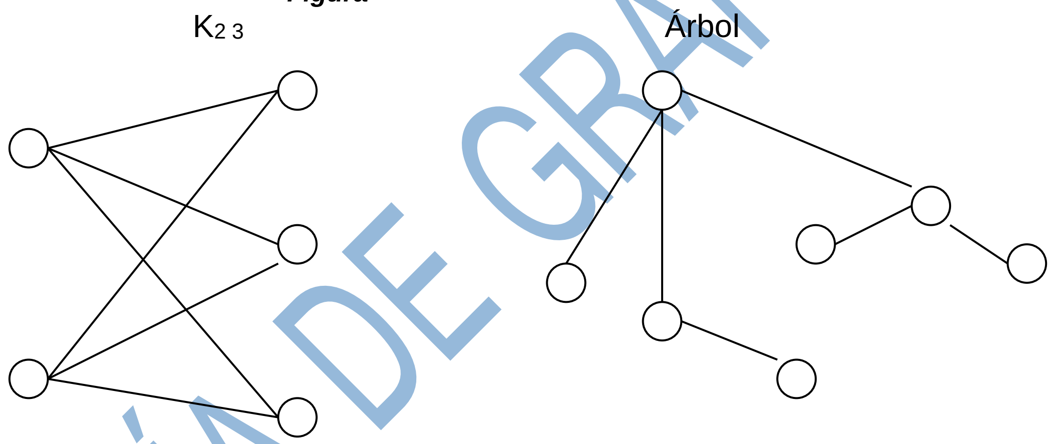
ACTIVIDAD CUATRO

Interpreta los subgrafos en forma simbólica, los tipos precisando con ejemplos del entorno.

Un subgrafo se obtiene de un grafo restándole parte de sus elementos. Por ejemplo si a K_4 le restamos la rama (2,3) obtenemos el subgrafo del medio de la figura 7 y si le restamos el vértice 1 resulta el subgrafo de la derecha

Un **grafo es bipartito** si V está dividido en 2 partes no vacías U y W y $E \subset U x W$. Si $m = |U|$ y $n = |W|$ entonces el máximo número de ramas es mxn. Si tiene mxn ramas entonces el grafo bipartito se dice completo y se escribe $K_{m\ n}$. En la figura (izquierda) representamos $K_{2\ 3}$

Figura



Un **árbol** es un grafo conexo que no tiene ciclos. También se puede caracterizar un árbol diciendo que desde cualquier vértice hay un solo camino para llegar a otro vértice. Un árbol es un grafo bipartito conexo.

Construya lo que visualizas en la diapositiva

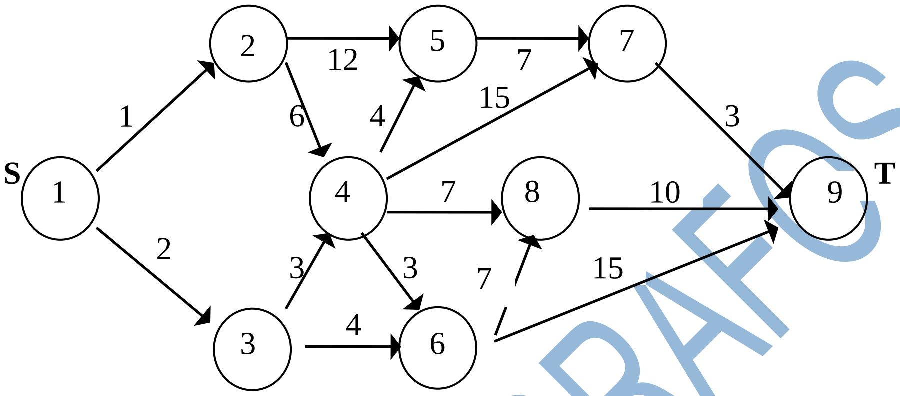
ACTIVIDAD CINCO

Realiza la aplicación teórica de grafos para la solución de ejercicios y problemas del entorno.

El problema del viajante: Interpretamos cada vértice del grafo completo G como una ciudad y cada rama (u,v) como un tramo de ruta que conecta las ciudades u y v. Interpretamos c(u,v) como la distancia entre u y v. Imaginamos un viajante que parte de una ciudad cualquiera y visita las restantes pasando una vez por cada una y volviendo a la ciudad de partida. Llamemos C al circuito que realiza. El problema consiste en hallar un C tal que la distancia total de los tramos que integran C sea mínima. En otros términos, dado un grafo completo G= (V,E) con una función $c:E\rightarrow R$ hallar un ciclo hamiltoniano de mínimo "costo". Observamos que hay (n-1)! Ciclos hamiltonianos ($n=|V|$). Resolver este problema por enumeración significa generar las (n-1)! Permutaciones y sumar el costo de cada una para elegir la mínima. Esto es imposible para una computadora si n es grande, p. ej., $n\geq 50$. No se conoce ningún "algoritmo eficiente" para resolver este problema. Como ejemplo de un problema practico de este tipo imaginemos n ítems que deben ser procesados en secuencia por una máquina y supongamos que se pierde un tiempo c(i,j) al pasar del ítem i al ítem j. El problema consiste en hallar una permutación de los n ítems que resulte en un tiempo total perdido mínimo.

Mínimo costo de un árbol: Sea G_0 un grafo conexo con un costo asignado a sus ramas. Si G_0 tiene algún ciclo le sacamos una rama al ciclo y nos queda otro grafo conexo G_1. Si G_1 tiene un ciclo repetimos la operación y seguimos así hasta tener un grafo conexo T sin ciclos, es decir, un árbol. Se trata de hallar un árbol T de mínimo costo. Podemos interpretar el problema de la siguiente manera. Los vértices son plataformas de bombeo de petróleo en el mar y la rama es una cañería que conecta dos estaciones. Se trata de instalar una red de cañerías que interconecte las estaciones a costo mínimo. Este problema se resuelve eficientemente mediante el algoritmo de Kruskal como veremos más adelante.

El camino más corto: Sea G= (V,E) un grafo dirigido con un costo definido en sus arcos. Sean S y T dos nodos de V. El problema consiste en hallar un camino dirigido de s a t de mínimo costo. La figura muestra un ejemplo. En general, mostraremos más adelante que existen algoritmos eficientes para resolver este problema. Este problema sirve como subrutina de muchos algoritmos.



ACTIVIDAD SEIS

Demuestre e interpreta teoremas de la teoría de grafos y relaciona con el entorno.

Teorema: Sea G = (V,E) un grafo. Entonces $\sum_{v \in V} \text{grado}(v) = 2|E|$

Demostración

Por inducción. Sobre el número de ramas. Si (1) es cierto suprimiendo una rama de G. digamos la rama (x,y) entonces al agregar esa rama el grado de x e y aumentan en 1.

Y el segundo miembro de (1) aumenta en 2. Por otra parte si el grafo tiene una sola rama el teorema es obvio.▼.

Corolario: El número de vértices impares de un grafo es par.

Demostración

Sea P el sitio de vértices pares e I el de vértices impares. Tenemos

$$\sum_{v \in P} \text{grado}(v) + \sum_{v \in I} \text{grado}(v) = 2|E|$$

La para suma es par y el segundo miembro es par por tanto la segunda suma es par▼

Teorema: En un grafo hay dos vértices que tienen el mismo grado.

Demostración

Sea n el número de vértices. El grado (v) puede ser 0 o a lo sumo n-1. Si hay dos o más vértices de grado 0 entonces el teorema es cierto. Por lo tanto consideremos 2 casos 1) no hay ningún vértice de grado 0. Como los n vértices tienen posibles grados1,2,...,n-1 por el principio de los casilleros hay dos vértices con el mismo grado 2) Hay un solo vértice de grado 0. Entonces los n-1 vértices restantes tienen posibles grados 1,2,...,n-2. Concluimos que el teorema es cierto también en este caso.▼

Teorema: Sea G conexo. G es bipartito sii todos sus ciclos tienen un numero par de ramas

Demostración

Corolario: El teorema es cierto aunque G no sea conexo. Basta considerar el teorema aplicado a cada "componente conexa" de G,

Observación

Recordamos que en un grafo un camino cerrado (ciclo) que pasa por todo vértice una y solo una vez se llama **ciclo hamiltoniano**. Mientras que para un ciclo euleriano existe una simple condición necesaria y suficiente para que exista un ciclo euleriano solo se conocen condiciones suficientes para la existencia de ciclos hamiltonianos. Por ejemplo, K_n tiene un ciclo hamiltoniano. De hecho tiene (n-1)! Ciclos hamiltonianos. Los siguientes 2 teoremas dan condiciones suficientes pero menos exigentes.

Teorema (Redei, 1934**):** Sea G un grafo dirigido tal que si u y v son vértices se tiene que u→v o bien v→u. Este grafo se llama un torneo (*). En un torneo con n vértices existe un camino hamiltoniano, es decir, existen v_i's tales que $v_1 \to v_2 \to \ldots \to v_n$

Demostración

Por inducción. Supongamos tener el camino $v_1 \to v_2 \to \ldots v_i \to v_{i+1} \to \ldots v_n$. Sea z distinta de esta n vértices. Si para algún i=1,2,...,n-1 se tuviera $v_i \to z \to v_{i+1}$ podemos extender el camino a n+1 vértices. Quedan 2 casos:

1) $v_1 \leftarrow z$ con lo cual podemos extender el camino así $z \to v_1 \to v_2 \to \ldots v_i \to v_{i+1} \to \ldots v_n$

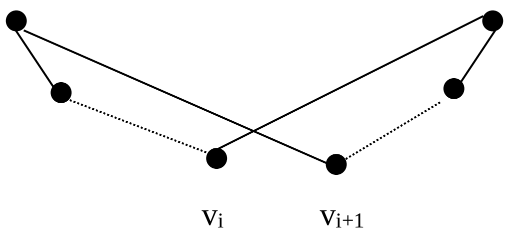
2) $v_1 \to z$, $v_2 \to z, \ldots, v_{n-1} \to z$, $v_n \to z$. Pero $v_n \to z$ permite extender el camino por la derecha.▼

(*) Considere n jugadores de tenis que participan de un torneo. Si u le gana a v escribimos $u \to v$ (no hay empate). El teorema dice que los jugadores pueden ordenarse en una sucesión de forma que para 2 jugadores sucesivos, el primero gana al segundo.

Teorema (Ore, 1960**):** Si en un grafo con n(≥3) vértices se tiene que para todo par u,v de vértices no adyacentes deg u +deg v ≥ n entonces G tiene un ciclo hamiltoniano.

Demostración

Por contradicción. Supongamos que G no fuera hamiltoniano y satisface deg(x)+deg(y)≥n si x e y no son adyacentes. Podemos agregar más ramas y la condición se satisfacerla a fortiori. Por lo tanto hay un G no halmitoniano tal que si agrego una rama mas es hamiltoniano y que satisface la condición. Sea un tal G. Sea x e y no adyacentes en G. Entonces G+(x,y) es hamiltoniano y, por lo tanto contiene un path hamiltoniano $x=v_1, v_2, \ldots, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{n-1}, v_n=y$. Ahora los pares v_1v_{i+1} y v_iv_n no pueden ser ambos adyacentes porque tendríamos un ciclo hamiltoniano en G (ver figura)



Así que debemos tener $a_{1,i+1} + a_{i,n} \leq 1$ (donde $a_{ij}=1$ si v_i y v_j son adyacentes y 0 si no). Tenemos que deg(x)+deg(y)=

$$\sum_{i=2}^{n-1} a_{1i} + \sum_{i=2}^{n-1} a_{in} = 1 + \sum_{i=3}^{n-1} a_{1i} + \sum_{i=2}^{n-2} a_{in} + 1 = 2 + \sum_{i=2}^{n-2} a_{1i+1} + \sum_{i=2}^{n-2} a_{in} = 2 + \sum_{1=2}^{n-2} a_{1i+1} + a_{in} \leq n-1$$

▼

ACTIVIDAD SIETE

Luego de la interpretación de teoremas resuelva problemas con grafos y aritméticos.

El problema del caballo en el juego de ajedrez

Consideremos un tablero de ajedrez. Y un caballo. Se pregunta si es posible que el caballo parta de un casillero y visite todos los otros 63 casilleros una solo vez volviendo al punto inicial. (Ciclo hamiltoniano).

Grafo representativo de la conexión aérea de ciudades

Si queremos representar mediante un grafo la red vehicular de una empresa de transportes entre diferentes ciudades, tendríamos el siguiente grafo

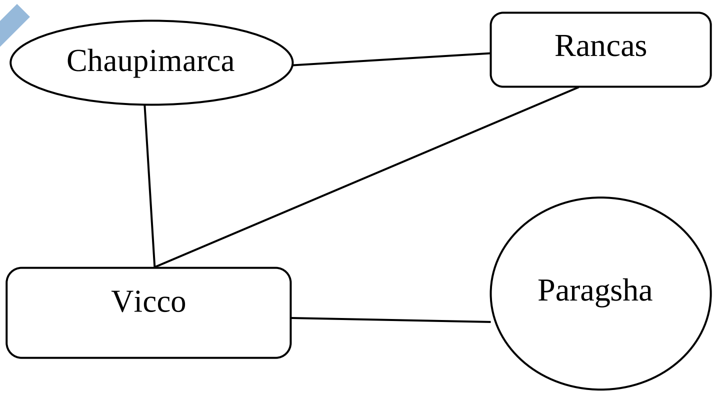
G = {*N*, *A*};   *N* = {Chaupimarca, Rancas, Vicco, Paragsha};

A = {(Chaupimarca, Vicco), (Chaupimarca, Rancas, Vicco), (Vicco, Paragsha), (Chaupimarca, Rancas)}.

Se dice que dos nodos son *adyacentes* o *vecinos* si hay un arco que los conecta. Los nodos adyacentes son representados por pares (a, b).

Un *camino* es una secuencia de nodos $n_1, n_2, ..., n_m$ tal que $\forall i$, $1 \leq i \leq (m-1)$, cada par de nodos (n_i, n_{i+1}) son adyacentes. Se dice que un camino es *simple* si cada uno de sus nodos, excepto tal vez el primero y el último, aparece sólo una vez en la secuencia.

Un *ciclo* es un camino simple en el que el primer y último nodos son el mismo ($n_1 = n_m$). Si un camino desde un nodo a él mismo no contiene otros nodos entonces decimos que es un *ciclo degenerado*.



AUTOEVALUACION

Resuelva cada plan, investigando y con su resumen en hojas adicionales, luego relacione con tabla de valoración

Plan 1.
Historia y definición de la teoría de grafos

Plan 2.
Resuma sobre: Vértice, ruta y núcleo.

Plan 3.
Cruce de información entre los compañeros de clases.

Plan 4.
Cruce de información entre los compañeros de clases de los ejercicios de comprobación.

Plan 5.
Solución de los problemas propuestos en su cumplimiento del 80%.

Plan 6.
Incorporación de su trabajo con las claves de respuestas y su verificación.

Plan 7.
Designación de puntuación de acuerdo a la tabla de valoración.

TABLA DE VALORACION

De acuerdo a la AUTOEVALUACION desígnate la puntuación respectiva y con la ficha de evaluación de actitudes

TABLA DE VALORACION.- La puntuación es por cada plan, (sesión de aprendizaje; actividades); cuenta el número de aciertos (puntos) de las respuestas y ubicándose en la siguiente escala.

Entre 50 y 60 Aciertos

¡EXCELENTE: Estás preparado para la evaluación sumativa; y luego iniciar el desarrollo del segundo proceso ¡Felicidades!

Entre 40 y 49 Aciertos

¡BIEN! También puedes rendir la evaluación sumativa, revisando brevemente los contenidos de las preguntas en las que tuviste desaciertos.

Entre 20 y 39 Aciertos

¡MAL! Es necesario que revises nuevamente el marco teórico y auto evaluarte nuevamente, antes de rendir la evaluación sumativa **¡TEN CUIDADO!**

Menos de 20 Aciertos

¡SIN COMENTARIO! Definitivamente no has interactuado, correctamente con las lecciones y el banco de preguntas.
Revisa cuidadosamente, cada una de las actividades de las lecciones propuestas por actividades y el banco de preguntas, comenta con tus colegas que desarrollaron y luego autoevalúate nuevamente, antes de rendir la evaluación sumativa. **¡SUERTE!**