UNIVERSIDAD NACIONAL DANIEL ALCIDES CARRIÓN

ESCUELA DE POSTGRADO

MAESTRIA EN DOCENCIA EN EL NIVEL SUPERIOR

TESIS

EL VALOR DIDÁCTICO DE LA MATEMÁTICA RECREATIVA PARA OPTIMIZAR LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS DE LOS ESTUDIANTES DEL I SEMESTRE DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DANIEL ALCIDES CARRIÓN

Tesis Para optar el Grado de Maestro

PRESENTADO POR

LICENCIADO : Jhonny Jaime MAMANI LIPA

ASESOR **:** Dr. Oscar PUJAY CRISTOBAL

Cerro de Pasco – 2016

UNIVERSIDAD NACIONAL DANIEL ALCIDES CARRIÓN

ESCUELA DE POSTGRADO

MAESTRIA EN DOCENCIA EN EL NIVEL SUPERIOR

TESIS

EL VALOR DIDÁCTICO DE LA MATEMÁTICA RECREATIVA PARA OPTIMIZAR LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS DE LOS ESTUDIANTES DEL I SEMESTRE DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DANIEL ALCIDES CARRIÓN

PRESENTADO POR

LICENCIADO : Jhonny Jaime MAMANI LIPA

SUSTENTADO Y APROBADO POR LA COMISION DE LOS MIENBROS DE JURADOS

Dr. Guillermo GAMARRA ASTUHUAMAN
PRESIDENTE

Dr.Rudy CUEVAS CIPRIANO
MIEMBRO

Mg. Jorge BERROSPI FELICIANO
MIEMBRO

Con especial aprecio, cariño y admiración a mis padres, hermanos y familiares, quienes me apoyaron en el fortalecimiento de nuestra profesión.

Jhonny Jaime

.

AGRADECIMIENTO

Mis sinceros agradecimientos a la Escuela de Post Grado de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión alma máter de mi formación profesional al servicio de la educación de la Región Pasco.

A mis queridos padres que siempre apostaron mi superación y su anhelo han sido cumplido, que ilumine desde la eternidad y siempre perdure en mí ser.

A todos los docentes de la Escuela de Postgrado que día a día nos aconsejaron que la educación es la más valiosa de la humanidad para cambiar a la juventud peruana.

Así mismo a los docentes de la Especialidad de Matemática – Física de la Facultad de Ciencias de la Educación por brindarme las facilidades durante la aplicación de mis instrumentos de investigación.

RECONOCIMIENTO

Mi sincero reconocimiento al Asesor Dr. Oscar PUJAY CRISTOBAL por orientarme en el proceso de las diferentes etapas de la investigación, fruto de ello es la culminación de mí tesis de investigación y a los expertos que me aconsejaron para la mejora del instrumento y su validación de los instrumentos que posteriormente fueron aplicado.

Así mismo a los Señores jurados por las recomendaciones realizadas para mejorar el trabajo de investigación durante la etapa de la revisión y a todos mis compañeros de trabajo que me dieron aliento constante.

RESUMEN

La educación superior tiene como objetivo principal formar individuos competentes respetando los valores de cada individuo y capaces de responder a las necesidades y preocupaciones que la sociedad de la que forman parte importante. Pero sabemos que en nuestra realidad los estudiantes traen consigo ciertas dificultades académicas en conocimiento como en habilidades, en particular en matemática .Así mismo se observan dificultades en razonamiento lógico y en el manejo del lenguaje matemático, por mencionar algunos ejemplos .pues como estudiante de maestría y docente se debe proponer programas de inducción, tales como cursos propedéuticos, con la finalidad de homogenizar los niveles de capacidad requerida por los estudiantes. Es importante la implementación de distintas estrategias para mejorar los conocimientos y habilidades lógicas de los estudiantes con el fin que en los semestres posteriores no tengan dificultades para enfrentar a otras asignaturas. Por ello se pretende adecuar algunos temas de su contenido a la matemática recreativa como una metodología, con el fin que los estudiantes logren desarrollar habilidades y actitudes que los ayuden a ser más independientes y pueden así por ellos mismos, rellenar las lagunas que se vayan presentado a lo largo de su carrera profesional.

INTRODUCCIÓN

En el capítulo I se contempla el planteamiento del problema, la identificación y determinación del problema por estudiar, la formulación del problema general y los específicos, la formulación de los objetivos general y específicos, la importancia y alcances de la investigación propuesta.

El capítulo II considera el marco teórico, que contiene los antecedentes de los estudios realizados que tienen relación con la presente investigación, las bases teóricas científicas pertinentes, la definición de términos básicos que se utilizan en la investigación, la formulación de las hipótesis que será, probadas al concluir la investigación; así como el sistema de variables que permite observar la operacionalización de las mismas.

En el capítulo III, se tiene en cuenta la metodología y técnicas de investigación, que considera el tipo de investigación según criterios, el diseño de investigación que hace referencia desde la recopilación de datos hasta el análisis correspondiente, los métodos, las técnicas e instrumentos de recolección de datos que se utilizaron, las técnicas de procesamiento de datos; así como la selección y validación del instrumento de investigación.

En el capítulo IV, se presenta los resultados y discusión de la investigación, se considera el trabajo de campo realizado donde se hace mención la aplicación del instrumento de investigación, el análisis descriptivo de las principales variables que participan en el estudio, el incluyendo la prueba de hipótesis paramétrica; así como la discusión de los resultados de la investigación en función de las variables consideradas en la investigación.

Finalmente, se incluye las principales conclusiones de la investigación, las recomendaciones, la bibliografía utilizada y los anexos.

EL AUTOR.

ABSTRAC

1 ° University students do not use learning strategies to learn logical mathematics I, their main interest is to acquire mathematical procedures that allow them to solve problems, to that extent they are oriented towards the technical training, through which they manage to solve the Problems in an automatic and unreflective way.

2 ° From the experimental group and control their knowledge is similar to the beginning of the investigation, but during the process of development of the Logical Mathematics I lessons, the experimental group improves in their abilities.

3 ° This study allows to show significant differences in relation to the pre - test of the experimental group and control, analyzing the hypothesis test based on the test zo it is concluded that the academic performance of the students of the I Semester of the academic year 2015 - A, Of the Faculty of Education of UNDAC are not significant because p> α (1,960> 0.05); Then the non-application of learning strategies in the teaching of mathematics. But when comparing the post-test of the experimental group and control by the zo test, it is observed that there are significant statistical differences for p <α (1,960 <0.05); That is, a significant increase in academic performance was observed in students in the experimental group.

4 ° The learning strategies significantly improve abilities in the subject of mathematical logic in students of the I Semester of the Faculty of Education Sciences of the experimental group because the contrast data obtained with the Student t test with paired or dependent data, Has $p < \alpha$ (0.000 <0.05); Because there is a significant increase in student approval, but there is a significant decrease in students' disapproval of the different activities proposed in relation to the segment of the units developed in the research, despite the almost total absence of adequate answers about such Correspondences, there appears a reasonable increase of adequate answers regarding the content of the subject of Mathematical Logic I, in the Faculty of Education Sciences.

5 ° Finally the regulation and control in the learning strategies are fundamental to evaluate the scope of the objectives, in this sense it was found that the students do not make a planning of the way they must solve the problems, the regulation of the process is in Function of a confrontation of the response obtained with the correct answer of the problem.

ÍNDICE

SEGUNDA PARTE: ASPECTO PRACTICO.

CAPÍTULO IV: RESULTADOS Y DISCUSIÓN

PRIMERA PARTE

ASPECTOS TEÓRICOS

CAPÍTULO I

PLANTEAMINETO DEL PROBLEMA

1.1 IDENTIFICACIÓN Y DETERMINACIÓN DEL PROBLEMA

La universidad es un hecho necesario en toda la sociedad, ya que la generación de conocimientos, su dimensión y utilización, es un factor clave para el desarrollo y competitividad de las naciones. La Confederación Mundial sobre Educación Superior organizado por la UNESCO en 1998 afirma que “la educación superior y la investigación forman hoy en día la parte fundamental del desarrollo cultural, socioeconómico y ecológicamente sostenible de los individuos, las comunidades y la naciones”. (UNESCO, 1998).

La educación superior tiene como objetivo principal formar individuos competentes respetando los valores de cada individuo y capaces de responder a las necesidades y preocupaciones que la sociedad de la que forman parte importante. Sin embargo, el panorama de la educación y en específico de la educación superior en el Perú, no es nada alentador y lleva a la conclusión de que el objetivo no está logrando del todo establecido en el Acuerdo Nacional de Educación establecido en el año 2001.

La selección de estudiantes que ingresan a la educación superior es, casi todas las instituciones mediante la aplicación de un examen de ingreso. El origen social de los jóvenes, el tipo de institución educativa de la que proceden, el ingreso económico familiar mensual, la actividad económica y los niveles de educación de los padres, entre otros influyen en las posibilidades reales para ingresar a la educación superior.

Además de esto se sabe que los aspirantes al ingresar ala la universidad traen consigo distinta preparación, esto debido a las instituciones de educación secundaria de procedencia, el ingreso familiar, etc., sin embargo, la universidad no puede ser simplemente culpar a dichos factores del bajo nivel académico de los estudiantes, por lo que debe plantear soluciones a dichos problemas.

Como ya se mencionó con anterioridad, los estudiantes traen consigo ciertas dificultades académicas en conocimiento como en habilidades, en particular en matemática los estudiantes tienen dificultades en: potenciación, radicación, productos notables, factorización, ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales; que son la base fundamental en el desarrollo de asignaturas que cursan en la carrera profesional. Así mismo se observan dificultades en razonamiento lógico y en el manejo del lenguaje matemático, por mencionar algunos ejemplos

Todo esto es un problema preocupante para las universidades de nuestro país, pues como estudiante de maestría y docente se debe proponer programas de inducción, tales como cursos propedéuticos, con la finalidad de homogenizar los niveles de capacidad requerida por los estudiantes para cursar los estudios de su carrera universitaria. Es importante la implementación de distintas estrategias para mejorar los conocimientos y habilidades lógicas de los estudiantes con el fin que en los semestres posteriores no tengan dificultades para enfrentar a otras asignaturas.

Por otra parte, desde hace tiempo, la problemática de la enseñanza – aprendizaje de la asignatura de matemática ha sido uno de los temas de mayor relevancia del quehacer docente, en los últimos años la preocupación ha ido creciendo tratando de dar respuesta a la pregunta central del problema: "¿qué hacer para mejorar la enseñanza-aprendizaje de la matemática?" (Espinoza, Gonzáles, y Monge 2002). Muchas son las investigaciones y trabajos propuestos para mejorar dicha problemática, utilizando distintos recursos o enfoques tales como la introducción de la TICs (Tecnología de la información y la comunicación) en el aula, la resolución de problemas, la modelación, y en particular se propone además de hacer uso de los diversos recursos antes mencionados, el uso de la matemática recreativa en el aula.

La matemática recreativa como una estrategia para mejorar las dificultades y tenores de los estudiantes hacia la matemática es crear un ambiente viable entre la formación secundaria y la universitaria, de buscar de combatir los indicadores de rezago, reprobación y deserción en la educación superior. En él, se trata de dotar a los estudiantes de las herramientas necesarias para que se vinculen a la educación universitaria y mejorar los promedios de los estudiantes en la matemática y apoyados en su proceso de adaptación con su nuevo entorno con el fin de que logren la excelencia académica.

Por otra parte la matemática recreativa como estrategia en el aula debe ayudar a ver las matemáticas como un reto y lleno de interés, además es un medio idóneo para ayudar al estudiante a desarrollar su mente y sus potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas y físicas de un modo armonioso.

Deulofeu en una prate de su artículo (Deulofeu, 2006) menciona:

> "¿Por qué mucha gente considera las matemáticas como algo aburrido e incluso siente aversión por esta ciencia?" ¿Es posible que una persona no especialmente dotada puede disfrutar haciendo matemática … Creo que esto es posible, pero para ello es imprescindible presentar las matemáticas de una determinada manera"

Por ello la misión fundamental de las universidades es formar a las generaciones futuras, las cuales son las que constituirán el país del presente y del mañana, por ello las facultades de educación debe ser formar educadores que sean competitivos en el ámbito regional, nacional e internacional, capaces de obtener e integrar conocimientos significativos, que les permite resolver eficientemente los problemas del área en la que se desenvuelven.

Por dichas razones en el presente trabajo de investigación se plantea una propuesta para le I Semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión durante el año académico 2016, en la que se pretende adecuar algunos temas de su contenido a la matemática recreativa como una metodología, con el fin que los estudiantes logren desarrollar habilidades y actitudes que los ayuden a ser más independientes y pueden así por ellos mismos, rellenar las lagunas que se vayan presentado a lo largo de su carrera profesional.

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.

1.2.1 Problema General

¿Cuál es el valor didáctico de la matemática recreativa, para mejorar los conocimientos matemáticos de los estudiantes del I semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión ?

1.2.2 Problemas específicos

- ¿Cómo el álgebra recreativa como estrategia mejora los conocimientos en la tercera unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación?

- ¿De qué manera la aritmética recreativa como estrategia influye en los conocimientos en la cuarta unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación?

- ¿Cuál es la diferencia entre el álgebra recreativa y aritmética de los conocimientos adquiridos entre la tercera y cuarta unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación?

1.3 FORMULACION DE OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo General

Analizar el valor didáctico de la matemática recreativa como herramienta para mejorar los conocimientos matemáticos de los estudiantes del I semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Explicar las ventajas del álgebra recreativa como estrategia en la mejora de los conocimientos en la tercera unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación.

- Explicar la influencia de la aritmética recreativa como estrategia en los conocimientos en la cuarta unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación.

- Evaluar los resultados de la diferencia entre el álgebra recreativa y aritmética de los conocimientos adquiridos entre la tercera y cuarta unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación.

1.4 IMPORTANCIA Y ALCANCES DE LA INVESTIGACIÓN

La presente investigación es un intento de abordar y responder a un problema permanente de nuestra realidad educativa de la región central del Perú, en especial de los estudiantes del I Semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación, el presente trabajo de investigación se justifica y respalda por las siguientes razones:

- La poca atención que dan los docentes a la Matemática Recreativa en el desarrollo de contenidos matemáticos, siendo este de mucha importancia como estímulo motivador que busca en el alumno una actitud fundamental de carácter anímico que lo predispone psicológicamente a resolver las dificultades matemáticas por más simples o complicadas que sean.
- Las conclusiones de la investigación nos permitieron validar la importancia de la Matemática Recreativa como estrategias en el campo educativo para disminuir las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de la Matemática y emitir conclusiones respecto a la aplicación de la Matemática Recreativa como instrumento a ser utilizados por los docentes del área, proponiendo su validación de un conjunto de estrategias y técnicas recreativas basados en problemas que permitan aprender los contenidos matemáticos en un ambiente de confianza y diversión.

Frente a ello se desarrollará la Matemática Recreativa, que consistirá en los juegos de creatividad e ingenio, acertijos lógicos, crucigramas, etc., ya que estos permitirán el desarrollo del conocimiento matemático de los estudiantes del I Semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la UNDAC, motivando la curiosidad, la creatividad, el ingenio, la habilidad de análisis crítico; de tal manera que el estudiante comprenda y resuelva los problemas matemáticos con satisfacción y entusiasmo.

Las razones que justificarían por el estudio del desarrollo y la construcción del conocimiento matemático (Onrubia, Rochera & Barberá,2004). La primera radicaría en el hecho de que los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas reflejan y permiten abordar, de manera especialmente adecuada, temas básicos para la investigación psicoeducativa actual, como los procesos de resolución de problemas, los lenguajes formales y sistemas notacionales de representación que actúan como mediadores en los procesos de enseñanza y aprendizaje, o la relación existente entre los tipos de conocimiento (declarativo, procedimental y condicional) y entre estos y las capacidades metacognitivas. La segunda de las razones remite, con gran probabilidad, a las dificultades, ampliamente documentadas, que muchos sujetos muestran para aprehender el conocimiento matemático en el ámbito formal de aprendizaje (el aula).

1.5 LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN

Entre las limitaciones que se pueden presentar en el desarrollo de la presente investigación, tenemos:

- Efecto reactivo ante los instrumentos; algunos docentes especialistas se niegan a colaborar para dar validez de los instrumentos elaborados, tanto del cuestionario y los test a aplicar a los estudiantes en experimentación.
- Margen de error de respuesta ante los instrumentos que fueron aplicado en los docentes y estudiantes de la especialidad Matemática – Física de la Institución Educativa “Daniel Alcides Carrión de la ciudad de Cerro de Pasco, 2012.

- La indiferencia de algunas autoridades y de los responsables de la Sub Dirección de la mencionada Institución.

Asimismo, consideramos necesario señalar algunas dificultades de los docentes y estudiantes tienen un mal perjuicio de la matemática recreativa como son:

- El juego no ha sido comprendido por docentes, padres de familia y estudiantes; con la formalidad y la importancia que se merece, sobre todo para el desarrollo del pensamiento lógico matemático.
- En nuestro medio se encuentra muy arraigado el paradigma de que la matemática es netamente abstracta, descontextualizada de toda realidad, tiene muy poca relación con lo cotidiano y mucho menos con lo lúdico.
- Las políticas educativas restringen cada vez más el tiempo y los recursos que el maestro puede dedicar a la investigación.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 ANTECEDENTES DE ESTUDIO

Este tema son tratados en la educación como informaciones teóricas y recientemente se viene efectuando un conjunto de iniciativas que están asumiendo estudios de investigación exploratoria y descriptivas a efectos de aproximarnos a un conocimiento más puntual sobre este tópico, en tal sentido los antecedentes son bastante limitados, pero es preciso mencionar algunas investigaciones existentes como:

Hugo Vera Duarte (1996), en su libro Matemática Recreativa II quien señala que (…) Es común entre los estudiantes la consideración de la matemática como una asignatura árida, difícil y temible, en su enseñanza aprendizaje, es por eso, propongo la matemática divertida que tiene un contenido de fácil manejo, motivando la curiosidad, la creatividad, el ingenio, la habilidad, el análisis crítico; de tal manera que, el estudiante realice sus tareas con satisfacción y, con el deseo de comprender y resolver mejor los problemas lógico matemáticos.

Yakov I. Perelman (2001) en su libro Matemática Recreativa dice: (…) Alguien puede pensar que sus conocimientos aritméticos son insuficientes, o que con el tiempo ya se han olvidado para disfrutar del contenido de matemáticas recreativas. ¡Se equivoca completamente! El propósito de la matemática recreativa reside expresamente en destacar la parte de juego que tiene la resolución de cualquier acertijo, no en averiguar los conocimientos logarítmicos que usted puede tener… Basta con que sepa las reglas aritméticas y posea ciertas nociones de geometría. No obstante la matemática recreativa ofrece una numerosa colección de pasatiempos, rompecabezas e ingeniosos trucos sobre ejercicios matemáticos hasta ejemplos útiles y prácticos de contabilidad y medición; pero, ¡cuidado! A veces los problemas aparentemente más sencillos son los que llevan peor intención.

BRAVO, R.; CUMPA, S. y GUILLERMO, M. En su tesis llegan a las siguientes conclusiones:

- La Matemática Recreativa se emplea porque es recomendable para crear, despertar o mover el interés del alumno hacia los puntos de estudio, aunque hay que decir que los problemas motivadores pueden emplearse en cualquier momento, siempre que será necesario y oportuno hacerlo.

- Para la enseñanza de la Matemática, el principal objetivo es saber llegar al alumno y esto lo conseguiremos partiendo de la motivación, que consideramos la parte más importante y esencial de la sesión de aprendizaje.

ESPINOZA, G. y GONZÁLEZ, R. En su tesis arriban las siguientes conclusiones:

- Es el hecho de que no son las actividades las que por sí mismas logran generar motivación e interés entre los estudiantes, sino que es la variedad de las mismas las que producen tal efecto. Es decir, la inventiva del docente juega un papel fundamental en la elaboración de las actividades propias de la matemática recreativa que se proponen, tanto en su aplicación, como en el abordaje de las mismas para hacer las modificaciones necesarias tendientes a mejorarlas y hacerlas más enriquecedoras y oportunas.
- Decir que la matemática recreativa es, en parte, "...la matemática que hace uno (el docente) como recurso metodológico, que permite que sea de una manera más agradable el aprendizaje" (González, 2002). Bajo esta premisa, la variedad de actividades metodológicas que se pueden enfocar son muchas, y son susceptibles de introducírseles mejorías y modificaciones de acuerdo a lo que cada objetivo educacional requiera dentro del planeamiento docente.

CARRASCO, (2000) en: Juegos lógicos para la comprensión de conceptos y procedimientos matemáticos. Para optar el título de doctor en Filosofía y Ciencias de la Educación en la Universidad de Barcelona, España. Se planteó como hipótesis un programa de juegos lógicos, en niños de tercer grado de primaria desarrollaría sus habilidades de comprensión de conceptos y procedimientos para resolver ejercicios del área lógico matemática. Concluyendo que:

> El juego lógico es un medio eficaz, para el desarrollo cognitivo del niño y desarrolla las capacidades relacionadas con las operaciones mentales propias de la matemática y es un medio para que conozca,

> comprenda y utilice los conceptos matemáticos, de forma más creativa y con menor esfuerzo. (pág.120).

RUESGA, (2005) en la investigación de tesis: En un trabajo titulado Educación del razonamiento lógico matemático en educación infantil, para optar el título de doctor en Filosofía y Ciencias de la Educación. Estimuló el razonamiento lógico matemático en niños de 3, 4 y 5 años, llegando a las siguientes conclusiones:

- Reconocer ante todo la importancia que debe de darse al desarrollo del razonamiento matemático de forma especial durante la etapa de educación inicial.
- Los niños mostraron un porcentaje significativo de acierto ante la tarea de clasificación, apoyando la afirmación Piagetiana que considera la clasificación como una de las actividades lógico-relacionales de más temprana aparición en el ser humano.

RUIZ, (2006) presentó en el I Congreso Internacional de Lógico Matemática en Educación Infantil, realizado en Madrid, España, un trabajo titulado Las estrategias didácticas en la Construcción de las Nociones Lógico matemáticas en Educación Inicial. Concluyendo lo siguiente:

> Se evidenció el desarrollo de los procesos de clasificación, conservación numérica, la ampliación del vocabulario, la utilización de formas argumentativas en la resolución de problemas, satisfacción en el trabajo cooperativo y el desarrollo de la autonomía en la realización de las actividades escolares". (pág.91).

2.2 BASES TEÓRICO – CIENTÍFICAS

"Conocer sólo la Matemática no es suficiente si no se tiene el sentido mismo de la evolución del pensamiento matemático" (Speranza, 1996)

> *Durante mucho tiempo se consideró que el aprendizaje era sinónimo de cambio de conducta, esto, porque dominó una perspectiva conductista de la labor educativa; sin embargo, se puede afirmar con certeza que el aprendizaje humano va más allá de un simple cambio de conducta, conduce a un cambio en el significado de la experiencia. La experiencia humana no solo implica pensamiento, sino también afectividad y únicamente cuando se consideran en conjunto, se capacita al individuo para enriquecer el significado de su experiencia*.

Para entender la labor educativa es necesario tener en consideración otros elementos del proceso educativo como: los profesores y su manera de enseñar, la estructura de los conocimientos que conforman el currículo y el modo en que éste se produce y el entramado social en el que se desarrolla el proceso educativo.

2.2.1. Conceptualización epistemológica de la matemática recreativa.

La caracterización de la práctica educativa del profesor de matemática en el aula, en opinión de Gascón (2001), Ernest (2000) y Sierpinska y Lerman (1996), se encuentra en un entremezclado de principios epistemológicos que orientan el origen, validez y desarrollo del conocimiento matemático, que pervive en los centros educativos. Gascón (op. cit.) presenta tres epistemologías en la organización del saber matemático (desde los griegos hasta el presente): la euclídea, la cuasi-empírica y la constructivista; Ernest (2000) defiende una filosofía absolutista y otra falibilista; mientras que Sierpinska y Lerman (1996) señalan dos: la del contexto de justificación y la del contexto del descubrimiento.

Gascón y Sierpinska y Lerman (1996), consideran que en los escritos de Lakatos de los años setenta (siglo XX), sobre la naturaleza de la matemática, se establece la idea de que la epistemología euclídea enmarcó el pensamiento racionalista que por más de dos milenios propuso que el conocimiento matemático se deducía a partir de un pequeño número de proposiciones axiomáticas, que encerraban verdades evidentes, enunciadas en términos que denominaban primitivos por considerar que eran del conocimiento del usuario de la matemática. Estos conocimientos se ampliaban a través del razonamiento deductivo, que permitía probar la validez de los enunciados contenidos en los teoremas a partir de las verdades establecidas en los axiomas, de esta manera llegaba a la teoría matemática, la cual construían a partir de los elementos mencionados.

Para Gascón esta perspectiva teórica se enmarca en el logicismo, el formalismo y el intuicionismo. El primero pretende reducir la matemática a la lógica, el segundo intenta construir una meta-teoría y el tercero persigue recortar el saber matemático hasta lograr una síntesis trivialmente segura. En la visión euclídea, Ernest ubica al platonismo y califica a tales perspectivas de filosofías absolutistas, por ver la matemática como una ciencia abstracta basada en principios establecidos a los que se llega mediante el razonamiento lógico. En ellas se aprecia una visión apriorística de la matemática, donde el conocimiento se genera desde una óptica 'a-histórica' y 'a-social' vinculada a insights ocurridos en la mente de seres iluminados. Óptica que, según Sierpinska y Lerman, responde a una epistemología fundacionalista. De acuerdo con estos autores, la epistemología euclídea ha motorizado la idea de que el proceso de enseñanza de la matemática es un acto sencillo que puede ser realizado y controlado por quien posea formación en la disciplina. Tal percepción se enmarca en la concepción clásica que, para Ernest, tiene como propósito "instruir" al alumno para que manipule símbolos orientados a hacer cosas de manera automática, sin juicio propio y dependiente de la ayuda del profesor. Según Gascón, esta concepción ha dado pie a un par de estilos didácticos considerados desde su perspectiva como clásicos: “teoricismo” y “tecnicismo”.

El teoricismo -para Gascón- coloca el énfasis en los conocimientos terminados y estructurados en teorías al estilo euclidiano, presta poca atención a la actividad matemática desarrollada durante la construcción de la teoría, sólo se interesa por el resultado final. Este hecho evidencia el carácter absolutista del estilo didáctico, pues la enseñanza y el aprendizaje de la matemática se reduce a enseñar y aprender teorías acabadas dando primacía al momento en que los estudiantes ven por primera vez los entes matemáticos presentados por el profesor en teorías estructuradas, para que la incorporen en sus razonamientos deductivos y las apliquen en la demostración de los teoremas que conforman la teoría. Esta práctica da poca importancia a la actividad experimental que origina el conocimiento matemático y considera a la solución de problemas como una actividad auxiliar utilizada para introducir, ejemplificar o consolidar conceptos matemáticos, que descartan cuando la solución del problema no proviene de la aplicación directa de los teoremas que conforman la teoría, en cuyo caso lo descomponen en ejercicios rutinarios, de modo que al final del acto educativo los alumnos muestran poco aprendizaje efectivo y escasa operatividad para manejar las fórmulas aplicadas en los algoritmos.

2.2.2 Representante de la matemática recreativa.

La matemática recreativa es un área de las matemáticas que se concentra en la obtención de resultados acerca de actividades lúdicas, y también la que se dedica a difundir o divulgar de manera entretenida y divertida los conocimientos o ideas o problemas matemáticos.

Por “matemática recreativa” se entiende como una serie de actividades que, más que trabajar con la formulación de números y cálculos complejos al estilo de las clases tradicionales, promueven el ingenio a través de juegos, adivinanzas, reflexiones y otras más, cercanas a la actividad humana, y que presentan retos que llaman al cuestionamiento a las personas, expertos matemáticos o no, esto sin dejar de lado la creatividad, que según Nickerson (1998, p. 110). *“... es el conjunto de capacidades y disposiciones que hacen que una persona produzca con frecuencia productos creativos*”, así Nickerson (1998, p. 109) citando a Jackason y Meddick (1973), señala por productos creativos a aquellos *“...productos originales y adecuados”*

Recientemente, algunas publicaciones (Casas, 1991; Florian, 1995; Revista: La Matemática y su Enseñanza, 1990) se hablan también de la posibilidad de enseñar matemática a través de entretenimientos matemáticos (por medio de las teorías lúdicas y heurística), de manera que se les plantea a los y las estudiantes “retos diferentes” para afrontar el aprendizaje de esta asignatura, y poder tomarla como algo divertido, creativo, y constructivo.

Se explicará ahora lo que ha sido la matemática recreativa en el desarrollo de la matemática misma, y cómo se le ha aplicado para la enseñanza de esta materia.

En la historia de la matemática, han sido múltiples los ejemplos en que se puede ver el impacto que la matemática recreativa ha tenido en el desarrollo de la teoría de esta ciencia como tal. Al respecto, Guzmán (1984) cita varios ejemplos:

1. En la edad media, Leonardo de Pisa (Fibonnacci) estudió la matemática desde una perspectiva de juego que le ayudó a crear teorías, y resultados

importantes, como es lo que se conoce como las series de Fibonnacci. En la edad moderna, Gerónimo Cardano escribe sobre los juegos de azar, dando lugar a que Pascal y Fermat (grandes matemáticos del siglo XVI), por medio de un espíritu lúdico, y en constantes cartas que se escribían uno a otro se va desarrollando la ya comentada teoría de la probabilidad. Dentro de los juegos que se propusieron estuvo el “problema del Caballero de Meré” (que era un juego de azar, propuesto por Antoine Gobaud).

2. Leibniz (1646-1716), matemático de gran fama por el desarrollo de la teoría del cálculo infinitesimal, fue un promotor de la teoría lúdica como actividad mediadora para ejercitar el intelecto. En alguna ocasión, en una carta escrita en 1715, dijo: “Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de juegos… Sería deseable que se hiciese un curso entero de juegos tratados matemáticamente”.

3. Euler (1707-1783), escuchó alguna vez hablar del problema de los siete puentes de Königsberg, que trataba de la posibilidad de hacer un recorrido que pasara por todos los puentes, pero pasando por cada uno una sola vez (llamado “camino euleriano”). Al tratar el problema y darle solución se dio inicio a la hoy tan utilizada teoría de grafos y la topología general.

4. Johann Bernoulli (1667-1748) reta a matemáticos de la talla de Leibniz, Newton, y Jakod Bernoulli, a participar en la solución del problema de la braquistócrona. 5. Hamilton (1805-1865) creó un juego llamado “Viaje por el Mundo”, que era un recorrido por los vértices de un dodecaedro (llamado

"camino hamiltoniano"), de manera que cada vértice era una ciudad importante del mundo, y el cual debía hacerse sin pasar dos veces por una misma ciudad. Esto también ayudó a desarrollar la teoría de grafos.

6. Gauss (1777-1855) era un gran aficionado a los juegos de cartas los cuales hacía de una manera muy analítica. Hilbert (1862-1943) crea los llamados juegos de disección. John Von Neumann (1903-1957) escribe con Oskar Morgestern en 1944 un libro llamado "Teoría de juegos y conducta económica". En este se estudian los juegos de estrategia y se crea un teorema de importancia en el análisis de temas económicos, llamado "teorema de minimax". Cuenta Martín Gardner que el mismo Albert Einsten (1879-1955) contaba con una amplia biblioteca dedicada a los juegos matemáticos.

A pesar de que los juegos fomentan una serie de posibilidades de pensamiento y reflexión muy parecidos a los que presenta la matemática (como lo demuestra la historia), una amplia mayoría de las y los matemáticos, educadoras y educadores matemáticos no pueden ver la riqueza que el juego puede prestar a la introducción y análisis de los temas matemáticos formales. Más bien se trata a la matemática desde una visión rígida (conductista) en la que no se puede dar cabida a la diversión (constructivista). Tal vez por eso, se puede hallar mucha literatura que hable sobre recreaciones matemáticas, pero no así de su aplicación en la educación.

En este sentido nuestro país no cuenta de mucha experiencia lúdica en secundaria, y más bien, parafraseando a Guzmán, pareciera ser que: *...nuestros científicos y nuestros enseñantes se han tomado demasiado en serio su ciencia y su enseñanza y han considerado ligero y casquivano cualquier intento por mezclar placer con deber. Sería deseable que nuestros profesores, con una visión más abierta y más responsable, aprendieran a aprovechar los estímulos y motivaciones que este espíritu de juego puede ser capaz de infundir en sus estudiantes. (Guzmán, 1984, p.7).*

Una de las personas que más ha contribuido a la divulgación de las matemáticas recreativas en nuestro tiempo fue Martin Gardner, con libros como El ahorcamiento inesperado y otros entretenimientos matemáticos, Nuevos pasatiempos matemáticos.

Martín Gardner (1992) sostuvo que “La matemática recreativa es un área de las matemáticas que se concentra en la obtención de resultados acerca de actividades lúdicas, y también la que se dedica a difundir o divulgar de manera entretenida y divertida los conocimientos o ideas o problemas matemáticos”.

En la cual Martín Gardner propuso algunas reglas y estrategias para resolver los juegos matemáticos, por ejemplo:

El juego del oso

El juego del oso es un juego de lápiz y papel de estrategia que se juega normalmente con una hoja de papel cuadriculado. Es un juego que requiere poca concentración y se juega mucho en los colegios, incluso durante las horas de clase.

Regla:

Por turnos, cada jugador puede escribir una O ó una S en uno de los cuadrados. El objetivo es formar la palabra OSO: el jugador que forma más veces la palabra OSO gana.

Cuando un jugador consigue poner la palabra OSO repite turno colocando otra letra. Al principio se van distribuyendo alternativamente las letras y es difícil caer en un error y que el otro se apunte un tanto, pero a medida que se van rellenando los cuadraditos y queda menos espacio se van reduciendo las opciones de evitar la formación de palabras. Y a menudo se termina con una avalancha de OSOs consecutivos.

El jugador que comienza tiene una ligera desventaja respecto al segundo, por lo que suele sortearse esta posición al inicio. Y si se echan varias partidas consecutivas se alterna.

El juego termina cuando se han rellenado todos los cuadraditos de la cuadrícula. El tamaño de esta cuadrícula es variable dependiendo del tiempo que se quiera que dure el juego, y puede ser tanto cuadrada como rectangular.

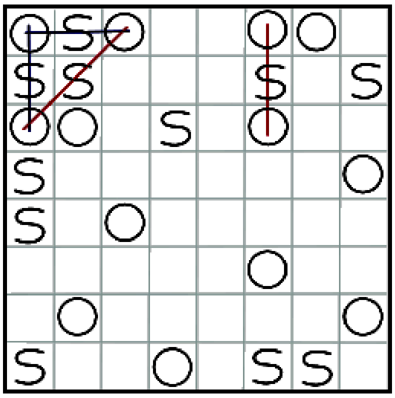
Existen dos formas de jugar, puntuando sólo los OSO escritos en horizontal y vertical en la cuadrícula o puntuando también los OSO escritos en diagonal, esta opción es un poco más difícil y requiere un poco más de atención para no cometer errores. Ambos jugadores acuerdan la forma de juego antes de comenzar la partida.

Estrategias de juego

Hay varias estrategias para ganar:

- Poner las letras lo más separadamente posible sobre el recuadro de juego, sobre todo al principio, para que el oponente no forme palabras.
- Poniendo muchas eses o muchas oes juntas se corre menos peligro de cometer errores y se pueden bloquear áreas.
- Colocando varias eses en línea se forma una cadena de palabras consecutivas si el rival comete un error.

- Poniendo letras con una separación de 2 cuadritos tanto en línea como en L de las demás letras no se corre peligro, pero progresivamente el tablero se va convirtiendo en un campo minado.



Según Yakov Isidorovich Perelman (1986, p.7) sostiene que (…) Alguien puede pensar que sus conocimientos aritméticos son insuficientes, o que con el tiempo ya se han olvidado para disfrutar del contenido de matemáticas recreativas. ¡Se equivoca completamente! El propósito de la matemática recreativa reside expresamente en destacar la parte de juego que tiene la resolución de cualquier acertijo, no en averiguar los conocimientos logarítmicos que usted puede tener… Basta con que sepa las reglas aritméticas y posea ciertas nociones de geometría. No obstante la matemática recreativa ofrece una numerosa colección de pasatiempos, rompecabezas e ingeniosos trucos sobre ejercicios matemáticos hasta ejemplos útiles y prácticos de contabilidad y medición; pero, ¡cuidado! A veces los problemas aparentemente más sencillos son los que llevan peor intención.

Perelman[1], en su libro de Algebra recreativa plantea un problema denominado:

[1] Perelman, Y. (1978) Algebra Recreativa. URSS: Mir – Moscu.

El caballo y el mulo

"Un caballo y un mulo caminaban juntos llevando sobre sus lomos pesados sacos. Lamentábase caballo de su carga, a lo que el mulo le digo: ¿de qué te quejas? Si yo te tomara un saco, mi carga sería el doble que la tuya. En cambio, si te doy un saco, tu carga se igualará a la mía". ¿Cuántos sacos llevan el caballo y cuántos el mulo?

El problema fue desarrollado mediante un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, y el resultado fue: El caballo lleva 5 sacos y el mulo 7 sacos.

2.2.3 Importancia de la matemática recreativa

Ya conocemos la importancia de la recreación en sus valores Educativo, Terapéutico y Psicológico; además de los valores Formativo, Práctico e Instrumental de la enseñanza de la Matemática. Todos esos valores podemos asignarle a la "Matemática Recreativa", pues por su naturaleza y características, ayuda a desarrollar todos ellos.

Su importancia específica en la enseñanza de la Matemática podemos describirla así:

- Mejora el rendimiento escolar de los alumnos en la asignatura de Matemática porque:
  - Se motiva más y mejor al alumno.
  - Es más sencilla de comprender la asignatura con esta forma
  - El alumno siente libertad de hablar y desenvolverse
  - El aburrimiento no existe

- Mejora la imagen del profesor de Matemática, logrando así el afecto y colaboración de los alumnos y el apoyo de los padres de familia.
  - Mejora la imagen de la asignatura de Matemática, llegando a gustarles a los alumnos.
  - Se soluciona el problema de la disciplina pues el alumno no perderá el interés a la clase y realizará sus tareas.

2.2.4 Valor didácticos de la matemática recreativa.

Dentro del marco teórico, este es el punto que más importancia tiene, pues aquí conoceremos a nuestro tema objeto de experimentación, sus características e importancia. Enseñar la Matemática en forma recreativa requiere conocer lo que es la recreación, por ello trataremos la concepción de este término como primer título de la "Matemática Recreativa" para así poder entender mejor todo el campo de este tipo de enseñanza.

RECREACIÓN

Existen muchas concepciones de la recreación; nosotros daremos una general, que no se restrinja al campo del deporte y entretenimiento.

Aunque muchos se refieren a la recreación como actividades de esparcimiento realizadas durante el tiempo libre y al aire libre; nosotros no reduciremos la recreación a estas actividades dentro de esos dos requisitos y sí muy ligada al juego.

"La recreación es una actividad fundamental de gran contenido educativo, y tiene por objeto desarrollar la personalidad y la capacidad creadora del hombre. Representa al mismo tiempo un verdadero derecho individual y social que debe ser respetado y protegido".

De ello podemos establecer el valor de la recreación, enfocado a tres campos: el educativo, el terapéutico y el psicológico; que se le asignan también a la "Matemática Recreativa".

VALOR EDUCATIVO

Debemos entender a la recreación como un medio de aprendizaje y de formación. La recreación es un aliado de la pedagogía, pues en los últimos tiempos su uso en el campo educativo, ha dado resultados exitosos para con los alumnos pues estos experimentan el aprendizaje directo en el campo y con la naturaleza en general, en su actividad, en su alegría y en toda su personalidad.

VALOR TERAPÉUTICO

Con la recreación tenemos o conservamos una buena salud física y mental, además de ser buena contra enfermedades. La recreación influye en la estabilidad emocional, ayuda a superar la timidez, la introversión y además ayuda a integrar la personalidad a través del desarrollo de actividades positivas. Restaura el balance orgánico y psíquico de las personas.

VALOR PSICOLÓGICO

Aparte de restablecer el equilibrio psíquico, forma el carácter y la personalidad, ayuda a la convivencia en grupo.

Mediante la recreación el alumno tiene gran variedad de experiencias, las cuales satisfacen sus intereses y necesidades. Con la recreación podemos descubrir talentos que hemos tenido escondidos.

Para nuestros intereses, la recreación con todo este valor la introducimos a la enseñanza de la Matemática, para así lograr un mejor aprendizaje en los alumnos.

CONCEPTO DE "MATEMÁTICA RECREATIVA"

La mayoría de autores, nos dicen que, cuando durante la enseñanza de la Matemática, utilizamos ejercicios curiosos, problemas de razonamiento un tanto graciosos, juegos matemáticos escritos, etc.; estamos hablando de "Matemática Recreativa".

Es decir, llaman Matemática recreativa a las propiedades y relaciones curiosas de ciertos números, soluciones de paradojas aritméticas, geométricas y algebraicas, juegos matemáticos, cuadros mágicos, etc.

Este tipo de ejercicios son utilizados de vez en cuando durante la enseñanza, para no hacer tan rígida y monótona la clase de Matemática; lo que se ha vuelto una característica en ella.

Nosotros no limitaremos la “Matemática Recreativa” a estos ejercicios escritos y mentales, pues además de ello, también incluiremos juegos, ejercicios físicos, dinamisidad en la clase y realizarlo no de vez en cuando, sino a lo largo de toda la clase.

Entonces la “Matemática Recreativa” podríamos conceptualizarla como la Forma Didáctica, en la que utilizamos medios educacionales, los cuales harán que el alumno aprenda jugando todos los conocimientos que queremos transmitirle, referidos a la Matemática.

“Matemática Recreativa” = aprender Matemática jugando

La “Matemática Recreativa” es pues la Forma Didáctica mediante la cual el alumno aprende Matemática jugando. No se trata de jugar por jugar sino de jugar para enseñar; enseñar jugando.

Como forma didáctica la podemos combinar con todas las formas didácticas que se quieran. Esta forma se basa en el abordaje de multimedios.

Los medios educacionales que utilicemos en la “Matemática Recreativa” estarán diseñados con anterioridad y cada uno de ellos servirá para que los alumnos adquieran un determinado conocimiento, además de hacer que jueguen.

2.2.6 Los problemas clásicos de la matemática recreativa

François Édouard Anatole Lucas (Amiens, 4 de abril de 1842 - París, 3 de octubre de 1891) fue un reconocido matemático francés. Trabajó en el observatorio de París y más tarde fue profesor de matemáticas en la capital del Sena. Se le conoce sobre todo por sus trabajos sobre la serie de Fibonacci y por el test de primalidad que lleva su nombre, pero también fue el inventor de algunos juegos recreativos matemáticos muy conocidos como el de las Torres de Hanói.

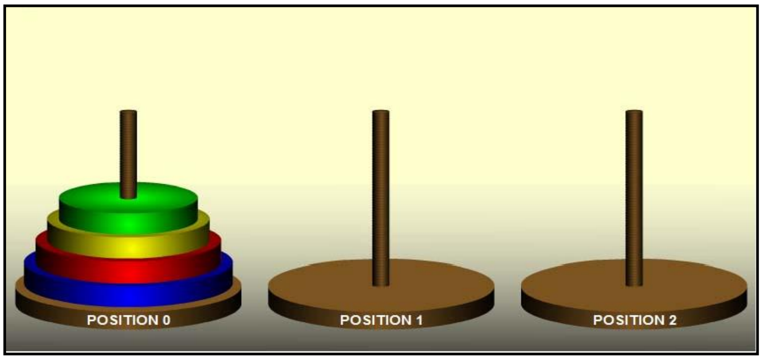
Las Torres de Hanói, es un rompecabezas o juego matemático inventado en 1883. Este solitario se trata de un juego de ocho discos de radio creciente que se apilan insertándose en una de las tres estacas de un tablero. El objetivo del juego es crear la pila en otra de las estacas siguiendo unas ciertas reglas. El problema es muy conocido en la ciencia de la computación y aparece en muchos libros de texto como introducción a la teoría de algoritmos.

Este es un problema matemático bastante conocido para estudiantes de Ingeniería de sistemas, ciencias computacionales, algoritmia, programación, matemática entre otros. En el problema se encuentran tres varillas puestas verticalmente, y en una de ellas se encuentran un número determinado de discos ordenados de mayor a menor de forma ascendente, el número de discos depende de la complejidad del problema. Para solucionar dicho ejercicio se deben pasar todos los discos de una varilla a otra, de forma que queden ordenados igual que al comienzo (de mayor a menor de manera ascendente)

Pero esto respetando algunas reglas:

1. Solo se puede mover un disco por vez.
2. Solo se podrá mover el disco que quede arriba en cualquiera de las tres varillas.

3. Un disco más grande no se puede ubicar encima de uno más pequeño.



El número de movimientos que hacen falta para terminarlo crece de manera muy rápida conforme vamos aumentando discos. De hecho, crece de manera exponencial.

Así:

Para 1 disco hace falta 1 movimiento

Para 2 discos hacen falta 3 movimientos

Para 3 discos hacen falta 7 movimientos

Para 4 discos hacen falta 15 movimientos

En general, para n discos hacen falta $2^n - 1$ (2 a la n menos 1) movimientos.

Walter William Rouse Ball (14 de agosto de 1850 – 4 de abril de 1925) fue un matemático inglés, abogado y miembro del Trinity College de Cambridge de 1878 a 1905.

Es conocido principalmente por su labor como historiador de las matemáticas y por ser autor de uno de los libros más populares de matemática recreativa, Mathematical Recreations and Essays, publicado por primera vez en 1892 y cuya edición actual, revisada por H. S. M. Coxeter, es la décimo tercera.

Samuel Loyd conocido como Sam Loyd (30 de enero de 1841 - 10 de abril de 1911), nació en Filadelfia y se crio en Nueva York, fue un jugador de ajedrez, compositor de ajedrez, autor de rompecabezas, y matemático recreativo.

Como compositor de ajedrez, fue el autor de una serie de problemas de ajedrez, a menudo con temas ingeniosos. En su apogeo, Loyd fue uno de los mejores jugadores de ajedrez estadounidenses, y ocupó el puesto 15^{to} en el mundo, de acuerdo con chessmetrics.com. Su estilo de juego era defectuoso, ya que intentaba armar fantásticas combinaciones en el tablero, en lugar de simplificar y buscar el triunfo.

Loyd sostuvo desde 1891 hasta su muerte en 1911 que él había sido el inventor del rompecabezas de quince. Sin embargo, un libro reciente afirma que Loyd en realidad se limitó a modificar un rompecabezas existente.

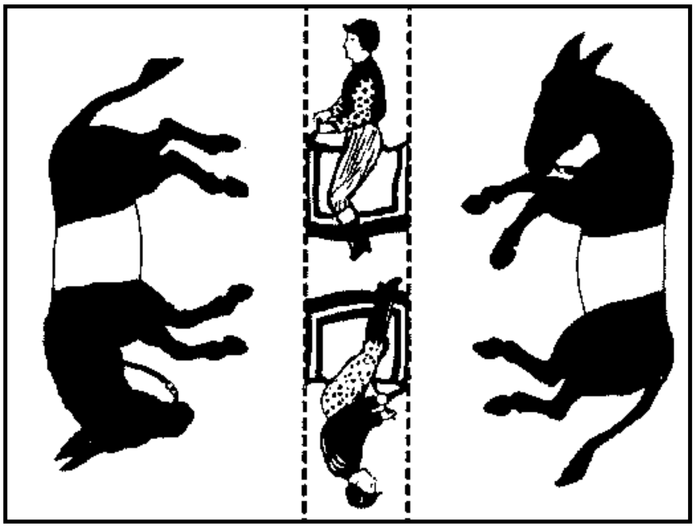
Era un entusiasta de los rompecabezas de Tangram, Loyd publicó un libro de setecientos diseños Tangram únicos y una historia fantástica sobre el origen del Tangram.

Tras su muerte, su libro "Cyclopedia de 5000 rompecabezas" fue publicado (1914) por su hijo. Loyd, fue introducido en el Salón de la Fama del Ajedrez, en los Estados Unidos.

Uno de los rompecabezas notables de Sam Loyd fue el "Problema de los burros". Se basa en una disposición similar a la de un rompecabezas con perros publicada en 1857.

En un papel se encuentra dibujado el perfil de dos burros y de dos jinetes, con una línea de puntos que permite separar a cada uno de los burros, mientras que los dos jinetes permanecen enfrentados en una misma cinta.

Para resolver el problema se debe cortar el dibujo a lo largo de la línea de puntos y reorganizar las tres piezas a fin de que los jinetes parezcan estar montando los burros.



Otro acertijo de Loyd es el del policía matemático:

"Buenos días, oficial", dijo McGuire. "¿Puede decirme qué hora es?"

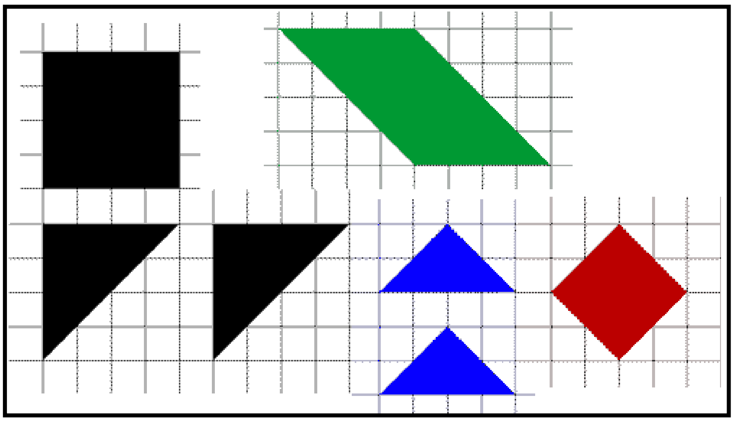
"Con toda exactitud", replicó el agente Clancy, más conocido como el policía matemático. *"Sume un cuarto del tiempo que hay entre la medianoche y ahora a la mitad del tiempo que hay entre ahora y la medianoche, y sabrá usted la hora correcta."*

¿A qué hora se produjo esta conversación?

Henry Ernest Dudeney (Mayfield, 10 de abril de 1857~Lewes, 24 de abril de 1930) fue un matemático inglés autor de juegos y puzzles matemáticos. Se le considera como uno de los mejores creadores de puzzles ingleses.

Un rompecabezas o puzle (también denominado con el término inglés puzzle) es un juego de mesa cuyo objetivo es formar una figura combinando correctamente las partes de ésta, que se encuentran en distintos pedazos o piezas planas. El término puzzle, pronunciado ['puθ.le̹] o ['puz.le̹] en español, es un sinónimo de rompecabezas.

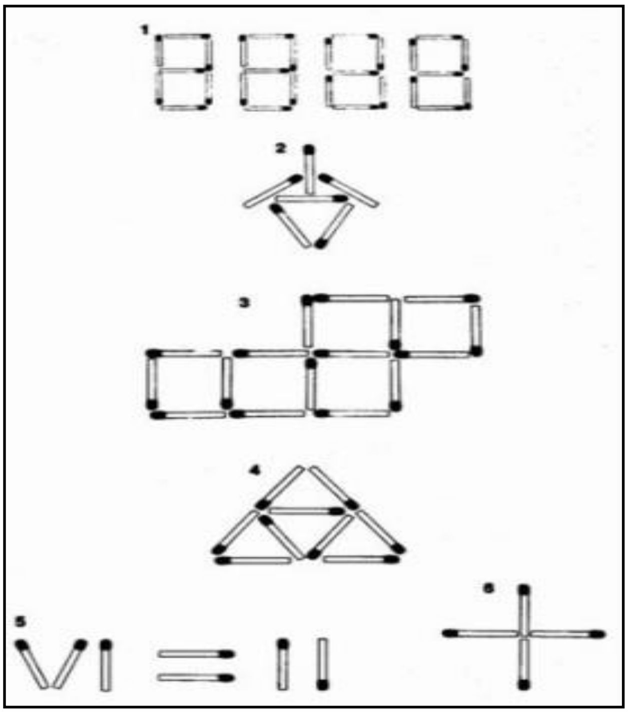
Acomode todas las piezas de la figura de modo de formar un cuadrado. Las piezas pueden rotarse.



Martin Gardner nació en Tulsa, Oklahoma (Estados Unidos), el 21 de octubre de 1914. Estudió filosofía y después de graduarse se dedicó al periodismo.

Saltó a la fama gracias a su columna mensual Juegos matemáticos, publicada en la revista de divulgación científica Scientific American entre diciembre de 1956 y mayo de 1986. A lo largo de esos treinta años trató los temas más importantes y paradojas de las matemáticas modernas, como los algoritmos genéticos de John Holland o el juego de la vida de John Conway, con lo que se ganó un lugar en el mundo de la matemática merced a la evidente calidad divulgativa de sus escritos. Su primer artículo llevaba el título de Flexágonos y trataba en concreto sobre los hexaflexágonos; el de más reciente aparición tuvo como tema los árboles de Steiner minimales.

Para terminar, he aquí seis entretenidos pasatiempos con cerillas (véase la Figura):



1. Retirando once cerillas, dejar seis.
2. La disposición de seis cerillas que vemos define un mapa plasmar que requiere tres colores si se exige que ningún par de regiones con una cerilla frontera común estén coloreadas del mismo tono.
3. Cambiando de posición dos cerillas hay que reducir de 5 a 4 el número de cuadrículas unitarias de la figura.
4. En la disposición de la figura es cosa fácil dejar sólo dos triángulos equiláteros retirando cuatro cerillas.
5. Moviendo solamente una cerilla debemos lograr una igualdad verdadera.
6. Moviendo solamente una cerilla hay que formar un cuadrado.

El juego de los tres gatos

Si tres gatos atrapan tres ratas en tres minutos, ¿cuántos gatos atraparán 100 ratas en 100 minutos?

SOLUCIÓN

La respuesta usual de este viejo acertijo es la siguiente: si a tres gatos les lleva tres minutos atrapar tres ratas, debe llevarles un minuto atrapar, cada rata. Y si les lleva un minuto cazar una rata, entonces los mismos tres gatos cazarán 100 ratas en 100 minutos.

Desafortunadamente, no es tan simple; esa respuesta presupone algo que por cierto no está expresado en el problema. Supone que los tres gatos han concentrado su atención en la misma rata hasta cazarla en un minuto, para luego dedicarse en conjunto a otra rata. Pero supongamos que en vez de hacer eso cada gato cace una rata diferente, y le lleve tres minutos atraparla. En ese caso, tres gatos seguirían cazando tres ratas en tres minutos. Les llevaría seis minutos cazar seis ratas, nueve minutos cazar nueve ratas, y 99 minutos cazar 99 ratas.

Ahora debemos enfrentar una curiosa dificultad. ¿Cuánto tiempo les llevará a esos mismos tres gatos cazar la rata número 100? Si les sigue insumiendo tres minutos la cacería, entonces los tres gatos demorarán 102 minutos para cazar las 100 ratas. Para cazar cien ratas en cien minutos - suponiendo que sea ésa la manera en la que los gatos cazan a sus ratas- por cierto necesitaremos más de tres gatos y menos de cuatro.

Por supuesto, es posible que cuando los tres gatos se concentran sobre la misma rata, tal vez puedan acorralarla en menos de tres minutos, pero nada en el enunciado del problema nos dice de qué modo podemos medir exactamente el tiempo que demandará esa operación. La única respuesta correcta al problema, entonces, es ésta: la pregunta es ambigua y no puede responderse si no se da más información acerca de la manera en que esos gatos cazan ratas.

El juego de viaje de ida y vuelta

Cuando se viaja en auto, sin duda el auto viajará a velocidades diferentes en diferentes momentos. Si la distancia total se divide por el tiempo total de manejo, el resultado es la velocidad promedio de ese viaje.

El señor Smith quería viajar de Chicago a Detroit y luego regresar. Deseaba hacer una velocidad promedio de 60 kilómetros por hora en todo el viaje de ida y vuelta. A1 llegar a Detroit descubrió que la velocidad promedio, hasta ese momento, era de 30 kilómetros por hora.

¿Cuál debe ser la velocidad promedio en el viaje de vuelta para que el promedio del viaje completo sea de 60 kilómetros por hora?

SOLUCIÓN

No es necesario saber la distancia entre Chicago y Detroit para resolver este problema. Cuando Smith llegó a Detroit, había recorrido cierta distancia y le había insumido cierta cantidad de tiempo. Si lo que desea es duplicar su velocidad promedio, es necesario que recorra el doble de esa distancia en la misma cantidad de tiempo. Resulta claro que, para lograrlo, ¡debe volver a Chicago sin insumir ningún tiempo! Como eso es imposible, no hay manera en la que Smith pueda aumentar su velocidad promedio a 60 kilómetros por hora. No importa con cuánta rapidez haga el viaje de regreso, siempre logrará un promedio menor de 60 kilómetros por hora.

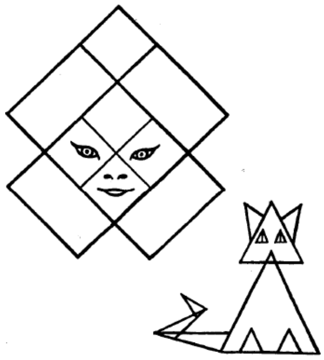
Será más fácil comprenderlo si atribuimos una cierta distancia para que Smith recorra, digamos 30 kilómetros de ida y 30 de vuelta. Como su velocidad promedio es de 30 kilómetros por hora, Smith completará la primera mitad de su viaje en una hora. Desea hacer el viaje completo a una velocidad promedio de 60 kilómetros por hora, lo que significa que debe completar el viaje entero en una hora. Pero ya ha usado esa hora. No importa con cuánta rapidez retorne, pues el tiempo total será de más de una hora, por lo que habrá recorrido 60 kilómetros en más de una hora y su velocidad promedio será menor a 60 kilómetros por hora.

EL JOVEN HINDÚ Y EL GATO

¿Cuántos cuadrados distintos puedes contar en el dibujo del joven hindú con turbante?

¿Cuántos triángulos distintos puedes contar en el dibujo del gato?

Observa atentamente. ¡Los problemas no son tan fáciles como podría parecer!

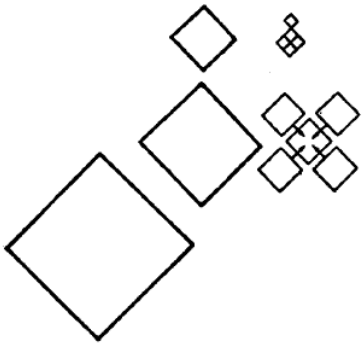


SOLUCIÓN

A1 resolver problemas de este tipo siempre es mejor contar las figuras de algún modo sistemático. En el dibujo del joven hindú, tomemos los cuadrados por orden de tamaño:

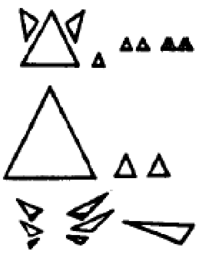
Los triángulos del gato pueden contarse así:

Cuadrados pequeños	5
Cuadrados medianos	5
Cuadrados grandes	1
Total	11

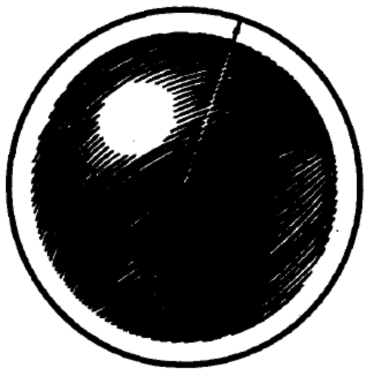


Los triángulos del gato pueden contarse así:

Cabeza	10
Cuerpo y pies	3
Cola	7
Total	20



BAJO LA BANDA



Imagina que estés ubicado en una esfera perfectamente lisa tan grande como el sol. Hay una banda de acero que abraza estrechamente la esfera alrededor del ecuador.

Se agrega a esta banda un metro de acero, de manera que se eleve de la esfera a igual altura en todo el contorno. ¿Eso dejará la banda a una altura suficiente como para que puedas:

(1) deslizar un naipe por debajo de ella?

(2) deslizar una mano debajo de ella?

(3) deslizar una pelota de béisbol por debajo de ella?

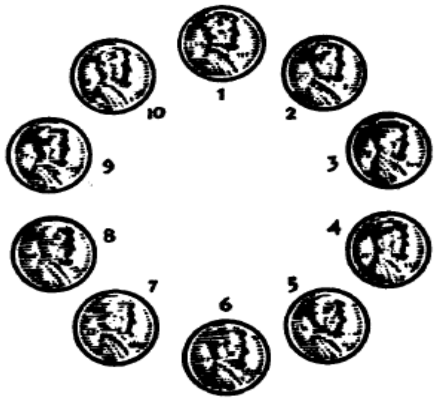
SOLUCIÓN

Parece sorprendente, pero esa banda de acero, después de que se le agregue un metro,.. ¡se alzará casi 16 centímetros en todo el contorno! Por cierto que es altura suficiente como para deslizar por debajo de ella una pelota de béisbol.

En realidad, la altura a la que se elevará la banda es la misma independientemente del tamaño que pueda tener la esfera. Es fácil comprender por qué. Cuando la banda está tensa alrededor de la esfera, es la circunferencia de un círculo con un radio que es el mismo que el radio de la esfera. Sabemos, a partir de la geometría plana, que la circunferencia de un círculo es igual a su diámetro (que es el doble de su radio) multiplicado por pi (π). Pi es 3,14, un número ligeramente mayor que 3. Por lo tanto, si aumentamos la circunferencia de cualquier círculo en un metro, debemos incrementar el diámetro un -poquito menos de un tercio de metro, es decir algo más de 31 centímetros. Esto significa, por supuesto, que el radio aumentará en casi 16 centímetros.

Tal como muestra claramente la ilustración, este aumento del radio es la altura a la que se elevará la banda con respecto a la superficie de la esfera. Será exactamente la misma, 15,9 centímetros, independientemente de que la esfera sea tan grande como el sol o pequeña como una naranja.

EL CIRCULO DE MONEDAS.



Para jugar a este juego, toma cualquier número de fichas (pueden ser monedas, guijarros o pedacitos de papel) y disponlos en un círculo. La ilustración muestra el principio de un juego con diez monedas. Los jugadores se turnan para sacar una o dos fichas, pero si se sacan dos, éstas deben estar una junto a otra, sin que haya entre ellas ninguna otra ficha o espacio vacío. La persona que saca la última ficha es la que gana.

Si ambos jugadores juegan racionalmente, ¿quién de los dos ganará y cuál estrategia deberá utilizar?

SOLUCIÓN

El segundo jugador, si utiliza la siguiente estrategia de dos etapas, puede ganar siempre:

1. Después de que el primer jugador haya sacado una o dos fichas, quedará un único espacio vacío en alguna parte del círculo. El segundo jugador saca ahora una o dos fichas del lado opuesto del círculo de modo que las fichas queden divididas en dos grupos iguales.

2. De ahora en más, sea cual fuere la jugada que el primer jugador haga en un grupo, el segundo jugador tomará la o las fichas correspondientes del otro grupo.

Esta estrategia se aclarará si juegas esta partida modelo. Los números se refieren a los asignados en la ilustración a cada una de las monedas.

Primer jugador	Segundo jugador
8	3
1,2	5,4
7	9
6	10 (gana)

Intenta esta estrategia al jugar con tus amigos y verás que el segundo jugador no puede dejar de ganar, independientemente de cuántas fichas se usen para formar el círculo.

2.2.7 El conocimiento matemático

Hace un cuarto de siglo, el destacado matemático y científico computacional Seymour Papert (1983) se preguntaba si a los alumnos a los que se les enseñó álgebra durante un primer curso aprendían mejor la geometría del curso siguiente que aquellos que durante ese primer curso se limitaron a hacer gimnasia. Ante la respuesta negativa a la pregunta, se planteaba luego una nueva cuestión: “¿cabe identificar y enseñar algo distinto del álgebra o de la geometría y que, una vez aprendido, facilite el aprendizaje del álgebra o de la geometría?” (p.131).

Nosotros efectuaríamos la misma pregunta pero en un formato distinto: ¿Hay que enseñar matemáticas a los niños o hay que hacer que piensen matemática- mente? Y si encontrásemos la respuesta en el segundo término de la disyunción, entonces cabría una segunda cuestión: ¿qué es el conocimiento matemático? y ¿qué supone hacer que los niños piensen matemáticamente?

El conocimiento matemático (o, si se prefiere, lógico-matemático) tiene unas peculiaridades que deben ser conocidas para entender los mecanismos de su adquisición y, de esta manera, elaborar las estrategias más oportunas para su enseñanza. Pero también tiene características que comparte con otros tipos de conocimiento (físico, social, etc.), que deben incorporarse al proceso de enseñanza y aprendizaje en las etapas iniciales de la escolarización. Ahora bien, ¿qué es este tipo de conocimiento que hemos venido denominando como lógico- matemático?

Es evidente que, en el proceso de interacción con el medio (sujeto-objeto), el sujeto solo tiene dos fuentes de extracción de la información: la acción y el objeto. Y los mecanismos mediante los cuales extrae la información reciben el nombre de procesos de abstracción. Dejando de lado los procesos de abstracción pseudoempírica, que se efectúan sobre las propiedades momentáneas de los objetos introducidas por la acción del sujeto (por ejemplo, la imantación de un bolígrafo por frotamiento), existen dos procesos básicos de abstracción: la abstracción reflexiva, que extrae información de la acción sobre los objetos; y la abstracción empírica, que extrae la información del propio objeto. La información que el sujeto extrae del objeto recibe el nombre de "conocimiento físico" y la que extrae de su acción sobre el objeto se denomina "conocimiento lógico-matemático".

2.2.8 La naturaleza del conocimiento matemático

La abundancia de trabajos e investigaciones en torno al desarrollo del pensamiento matemático constituye un buen indicador de la atracción suscitada por este tema en los investigadores cognitivo-evolutivos y educativos de todos los países (Royer, 2003; Ernest, Greer & Sriraman, 2009). Como hemos apuntado anteriormente, este interés se podría focalizar en dos conjuntos de razones, que se justificarían tanto desde la teoría como desde la praxis. Entre las razones teóricas se encuentran: la naturaleza jerárquico-secuencial peculiar de estos con- tenidos, que favorece en gran medida el estudio evolu- tivo de la adquisición de los mismos; la facilitación de este tipo de conocimiento para la articulación de reglas y procedimientos, que permite examinar más claramente que en otros ámbitos la relación entre representaciones y estrategias o representaciones formales y procedimien- tos; o la posibilidad de analizar independientemente la sintaxis (reglas procedimentales) y la semántica (signifi- cado), sus relaciones y la incidencia que la segunda pue- de tener para la adquisición de la primera.

Desde el punto de vista práctico, es notoria la importancia que esta ciencia posee actualmente en nuestra cultura y, de forma muy especial, su compleja traslación al currículo escolar que, sin embargo, no parece haber logrado hasta ahora un grado aceptable de alfabetización matemática en los individuos que componen nuestra sociedad.

Ahora bien, el conocimiento matemático presenta, al menos en su estado final de construcción, un conjunto de características peculiares que le otorgan una notable especificidad según Barberá & Gómez (1996):

- Es un conocimiento de un alto nivel de abstrac- ción y generalidad, que elimina las referencias a objetos, situaciones y contextos particulares, y que se desvincula también de las formas de repre- sentación perceptivas e intuitivas de esos objetos, situaciones y contextos.
- Es de naturaleza esencialmente deductiva y no se valida mediante el contraste con fenómenos o datos de la realidad, como en otras disciplinas científicas, sino mediante un proceso interno de demostración a partir de determinadas definiciones fundamentales o axiomas. Este carácter deductivo provoca, además, que el conocimiento matemático tenga, aún en mayor medida que otras ciencias, una estructura altamente integrada y jerarquizada.
- Se apoya en un lenguaje formal específico, que presenta notables diferencias con el lenguaje natural: implica un conjunto particular de sistemas notacionales, busca la precisión, el rigor, la abreviación y la universalidad, y su finalidad fundamental no es tanto la representación o la comunicación de fenómenos o situaciones reales cuanto la posibilidad de obtener resultados internamente consistentes, realizando para ello inferencias vá- lidas en términos del propio sistema axiomático que constituye el conocimiento matemático. También en este sentido, suprime intenciones, emociones y afectos, y es de naturaleza esencialmente teórica, impersonal y atemporal.

Es difícil que alguien esté radicalmente en desacuerdo con que las características anteriores definen el conocimiento matemático, y más bien considerará, de manera muy probable, que describen adecuadamente al menos buena parte de su experiencia matemática escolar. Sin embargo, y pese a la evidencia a favor de una caracterización como la que acabamos de plantear, cabe afirmar que esta es solo una cara de la moneda matemática. En efecto, las matemáticas tienen también una dimensión menos abstracta y descontextualizada, más funcional y relacionada con la resolución de problemas prácticos en situaciones concretas, más pragmática y situada.

2.2.9 Los tipos de conocimiento matemático

En primer lugar, sabemos que lo real se presenta ante el sujeto como un continuo que debe interpretar, lo que equivale a decir que le tiene que conferir un significado. Por ello interactúa con el medio, intentando descomponer y recomponer ese continuo a fin de conocerlo. Las unidades (funcionales) de conducta, mediante las cuales el sujeto interactúa con su entorno reciben el nombre de «esquemas». Un esquema es una «forma» que se aplica a un contenido (sin lugar a dudas, el contenido puede ser otro esquema e incluso el mismo esquema).

Los esquemas actúan en tres niveles: sobre lo real, sobre representaciones de la realidad y, en tercer caso, sobre los propios esquemas. Precisamente, la potencialidad de un esquema viene determinada por la variedad de contenidos a los que se puede aplicar. Por ejemplo, durante el periodo sensoriomotor, los esquemas (de acción) son formas que solo se pueden aplicar a un contenido real y presente; durante el periodo de preparación y organización de las operaciones concretas, los esquemas (simbólicos o representacionales) son formas que actúan sobre contenidos reales (presentes, simbólicos o simbolizados), es decir, actúan tanto sobre la realidad, como sobre representaciones de lo real; finalmente, durante el período de las operaciones formales, los esquemas pue- den ser, alternativamente, formas y contenidos y, por tanto, pueden actuar sobre lo real, sobre representaciones de lo real y sobre los propios esquemas.

Supongamos un esquema representacional que llamaremos “opuesto” y que representaremos con (-), y supongamos, además, la representación numérica de un conjunto formado por cinco elementos (5). Entonces, podemos decir que el opuesto de 5 es -5. Como esta acción es interiorizada y reversible, la llamaremos ope- ración y supone la aplicación de un esquema (forma), al que hemos llamado opuesto, a la representación de una realidad (contenido), una de cuyas características es la de tener cinco elementos. Lo anterior nos lleva a concluir que la construcción de los números negativos se debe producir durante el periodo de las operaciones concretas.

Supongamos, ahora, que el mismo esquema (opuesto) pudiera actuar sobre sí mismo; entonces estaríamos ante la siguiente situación -(-), que habría que definir como el opuesto del opuesto, y cuyo resultado sería que “el opuesto del opuesto es el mismo elemento”. Traducido en términos matemáticos y con lenguaje escolar: menos por menos = más. Por tanto, la llamada regla de los signos es una operación formal.

Para Piaget (1976), el sistema cognitivo humano está constituido por dos subsistemas: El subsistema I (que es el sistema de comprender o conceptual) y el subsistema II (que es el sistema de saber hacer o procedimental); es decir que, para Piaget, «conocer» es, indisociablemente, comprender y saber hacer. Los instrumentos cognitivos (esquemas) que sostienen estos dos subsistemas son los esquemas representativos y los esquemas procedimentales.

En efecto, en 1979, Piaget e Inhelder introducen un nuevo par dialéctico en la teoría del eminente epistemólogo suizo, vinculado a la función reguladora de la inteligencia: estructuras versus procedimientos o conocimiento declarativo versus conocimiento procedimental (Inhelder & Piaget, 1979).

Para que el conocimiento matemático sea funcional, las redes de esquemas representativos deben generar un conjunto de procedimientos. Estos procedimientos, normalmente denominados algoritmos, orientan las acciones necesarias para resolver problemas matemáticos. Los algoritmos son, por tanto, procedimientos que se aplican a una clase concreta o familia de problemas y que, si se siguen correctamente, garantizan también la solución correcta. Los algoritmos (el conocimiento procedimental) son muy importantes en la solución de problemas matemáticos; sin embargo, "seguir un algoritmo" no es «solucionar un problema», pero sí lo es que el alumno cree un algoritmo y lo aplique a una familia de problemas. Para que los algoritmos sean lo suficientemente flexibles al emplearlos en la solución de problemas matemáticos, deben basarse en el conocimiento declarativo y estar orientados por él (Bruning, Schraw & Ronning).

El conocimiento declarativo

El conocimiento declarativo está constituido por los hechos (como una colección de eventos ordenada en función de un criterio), conceptos y sistemas conceptuales (que describen regularidades o relaciones entre hechos y que se designan mediante signos o símbolos) y principios (teorías o modelos explicativos o de naturaleza descriptiva normalmente basados en relaciones formales, lógicas y de causalidad) de carácter matemático. Este tipo de conocimiento es generado por un tipo de esquemas que Piaget (1976) denominó esquemas representativos y que nos permiten comprender las razones (saber por qué).

El conocimiento declarativo no se limita, por tanto, a un conjunto de definiciones y de teoremas al margen del proceso de demostración que los sustenta. Conocer, por ejemplo, el teorema de Pitágoras, no significa saber únicamente el enunciado final de dicho teorema, sino también el razonamiento mediante el cual contribuye la comprensión del teorema en cuestión. Ello resulta especialmente relevante desde el punto de vista de la enseñanza y el aprendizaje de este tipo de contenido, que no debe limitarse a enunciados o formulaciones finales, sino que debe extenderse también a los procesos o caminos que conducen a estos enunciados o formulaciones finales.

En estrecha relación con el procedimental, el conocimiento declarativo aporta elementos relevantes que es preciso reconocer para ejecutar un procedimiento particular, como las características de un problema y sus condiciones internas. Así entendido, el conocimiento declarativo influye decisivamente en la comprensión y representación adecuadas y pertinentes de los problemas susceptibles de ser resueltos a través de métodos matemáticos, así como en la formación de nociones que posteriormente se aplicarán. Si estas nociones no se construyen de un modo sólido y congruente, se inducirá a los alumnos a graves errores, muchas veces difíciles de detectar y subsanar. Por ejemplo, la conocida creencia, en relación al algoritmo de la multiplicación, según la cual "siempre que se multiplica un número por otro el número se hace mayor" resulta, sobre todo en etapas iniciales de la escolaridad, muy intuitiva; sin embargo, no siempre es cierta y supone una clara simplificación conceptual del procedimiento, que, aunque pueda parecer aparentemente útil a corto plazo, perjudica en último término la propia representación de la operación.

El conocimiento procedimental

El conocimiento procedimental es integrado por los procedimientos, a partir de esquemas procedimentales y nos permite saber hacer. En el ámbito de las matemáticas, este tipo de conocimiento supone la aplicación de secuencias de acciones y operaciones de las que se obtiene un resultado acorde con un objetivo concreto. Saber explicar un teorema no garantiza que se sepa aplicar correctamente en la resolución de una determina- da situación problemática, y viceversa: una cosa es, por ejemplo definir el número π como "la razón de la circunferencia a su diámetro" y otra saber calcular los metros que recorre una rueda que da seis vueltas sobre su eje; ni lo primero asegura necesariamente lo segundo ni lo segundo, necesariamente lo primero.

El proceso de construcción de estas formas de actuación puede adquirir, en el ámbito del aprendizaje de las matemáticas, una naturaleza automática, pues, debido a la complejidad procedimental, los procedimientos se van transformando en cadenas procedimentales o «procedimientos de procedimientos», que tienen la ventaja de permitir la simplificación de procesos posteriores, aunque atenuando al mismo tiempo su acceso consciente. A pesar de ello, este encapsulamiento de acciones encadenadas es necesario para el aprendizaje, puesto que deja espacio para operaciones que son cada vez más complejas.

Desde una perspectiva prescriptiva, se suelen distinguir en matemáticas dos grandes tipos de procedimientos: los algorítmicos y los heurísticos. Mientras que los primeros llevan a una solución adecuada si se siguen todos los pasos prescritos (piénsese en la realización de una raíz cuadrada, por ejemplo); los segundos no garantizan una correcta solución, pero guían de manera sistemática el proceso para llegar a ella (como dibujar 'un todo' dividido en partes para representar una fracción o descomponer un problema en submetas). Los procedimientos algorítmicos desarrollan, preferentemente, capacidades matemáticas fundamentales basadas en la repetición e implican su aplicación a contextos necesarios. En cambio, los procedimientos heurísticos implican un mayor esfuerzo cognitivo y exigen del alumno un proceso de toma de decisiones no predeterminadas, como sí ocurre en el caso de los algoritmos, en función de los resultados parciales que se van consiguiendo a lo largo de su aplicación (Pons & Serrano, 2011).

Sin embargo, el nivel de prescripción no es el único criterio posible para clasificar el elemento procedimental del conocimiento matemático. Si lo enfocamos desde una perspectiva funcional, encontramos dos gran- des conjuntos de procedimientos que se aglutinarían en base a sendos criterios de clasificación: en función de las habilidades que promueven y en función de su grado de especificidad. En el primer caso, es posible distinguir, por ejemplo, entre procedimientos que permiten la recogida de información, la clasificación de datos, la inferencia de resultados parciales, la representación de modelos matemáticos, la expresión de resultados, etc., actividades todas ellas que suponen acciones específicas. En relación con el grado de especificidad, se reconocen procedimientos más generales en cuanto son más transversales, puesto que se pueden trabajar desde distintas áreas del currículo (histogramas, uso del ordenador o de la calculadora, etc.), y más específicos, en cuanto son propios de las matemáticas y poco transferibles a otras áreas curriculares (algoritmos específicos, series numéricas, etc.).

Los esquemas operatorios: la indisociabilidad declarativo-procedimental del conocimiento matemático.

Aunque solo existen dos subsistemas cognitivos (comprender y saber hacer) y parece que ambos se encuentran dotados de los instrumentos adecuados (esquemas representativos y esquemas procedimentales), para producir el conocimiento necesario en el ámbito matemático (declarativo y procedimental), es necesario recurrir a un tercer conjunto de esquemas porque existe un tipo de conocimiento que es indisociablemente declarativo y procedimental. Este tercer conjunto de esquema es denominado por Piaget con el nombre genético de esquemas operatorios.

En efecto, tratemos de determinar, en la Figura 1, el cardinal del conjunto mediante la aplicación de un esquema de conteo:

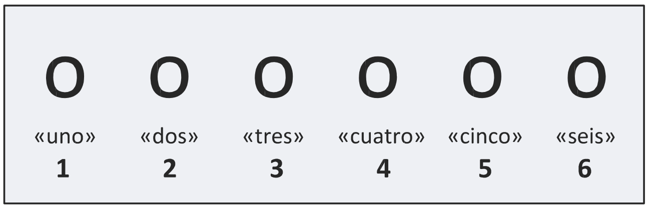


Figura 1. Conjunto para aplicación esquema de conteo

Comencemos con el punto inicial de la serie numérica y vayamos atribuyendo un numeral, y solo un numeral, de forma iterativa, a cada uno de los elementos del conjunto. Digamos entonces: “uno”, “dos”, “tres”, “cuatro”, “cinco” y “seis”, hay seis canicas.

Supongamos que las canicas se disponen ahora de la forma como se muestra en la figura 2:

Figura 2. Reagrupación de las canicas

Es muy probable que, ante esta nueva situación, apliquemos el mismo esquema, es decir, el esquema de conteo, pero que esta vez, en lugar de contar siguiendo la serie de los números naturales, lo hagamos según la serie de los números pares: “dos”, “cuatro” y “seis”. Hay seis canicas.

2.2.10 Desarrollo del conocimiento matemático

Para Kitcher (1988a), el conocimiento matemático no está constituido desde el comienzo, y a priori, en cada generación. En cada momento se aprende un cierto nivel matemático que puede ser, y de hecho lo es, permanentemente modificado. En ese desarrollo, el conocimiento viene apoyado por cierta práctica que, para este autor, posee varios componentes (Kitcher, 1988b). En concreto, dichos componentes son:

- Un lenguaje.
- Un conjunto de proposiciones aceptadas por la comunidad matemática en un tiempo determinado.
- Un conjunto de cuestiones importantes, de problemas no resueltos.
- Un conjunto de formas de razonamiento.
- Un conjunto de visiones del hacer matemático, es decir, de cómo se hacen matemáticas.

Podemos comprobar, sin caer de pleno en la historicidad werneriana, que estos componentes que Kitcher sitúa en la filogénesis, pueden ser trasladados, con todo derecho, a la ontogénesis.

En efecto, en cada momento de la psicogénesis se adquiere un cierto nivel matemático que está en continuo cambio. Por ejemplo, hemos podido comprobar (Serrano, 2005) en la macrogénesis, un desarrollo que podría perfectamente responder a esta secuencia: esquemas aditivos → pensamiento aditivo conmutativo → generalización de los esquemas aditivos → esquemas multiplicativos → pensamiento multiplicativo conmutativo → coordinación de esquemas aditivos y multiplicativos → pensamiento distributivo → ... →. Analizando el desarrollo de los esquemas de conteo, se puede comprobar igualmente, pero ahora en la microgénesis, una secuencia evolutiva: aplicación de palabras número (no tienen por qué ser numerales), sin ningún tipo de orden, a los objetos (uno, tres, doce, nueve, “veinticatorce”, seis...) → aplicación de numerales, sin ningún tipo de orden, a los objetos (uno, tres, doce, nueve, siete...) → aplicación de numerales a los objetos en un orden (sabe que unas palabras se dicen antes que otras) no estable (uno, tres, seis, nueve, once..., aunque otras veces puede decir: uno, dos, cuatro, nueve...) → aplicación de numerales a los objetos con un orden estable que no responde a la cadena de los números naturales (uno, tres, siete, nueve,.., y si vuelve a contar el mismo conjunto repite la misma serie: uno, tres, siete, nueve,...) → aplicación de numerales a los objetos con un orden estable que se corresponde con la cadena de los números naturales (uno, dos, tres, cuatro, cinco,...) pero que tiene carácter irrompible (siempre se empieza a contar por el número ‘uno’) → ... →.

Este conocimiento se apoya en cada momento en un lenguaje determinado. De manera que hemos de analizar las ejecuciones correctas o incorrectas del su- jeto desde la «historicidad ontogenética».

2.2.11 Los procesos de construcción del conocimiento matemático.

La caracterización de las matemáticas, que hemos efectuado al principio como un dominio de naturaleza dual, nos obliga a ir más allá de la construcción individual del conocimiento matemático y a considerar que la adquisición de los saberes matemáticos supone un proceso de construcción mediada. Esto quiere decir que los sujetos construyen el conocimiento matemático mediante la interacción, la negociación y la comunicación con otras personas en contextos particulares culturalmente definidos, y en el que determinados artefactos e instrumentos culturales juegan también un papel decisivo.

Esta caracterización determina un modelo de adquisición de la competencia matemática que postula, en primer lugar, que esta no se puede adquirir sin un proceso continuado de construcción por parte del sujeto, que requiere su participación en una amplia gama de situaciones y contextos de actividad matemática relevante. En segundo lugar, el modelo postula que estos procesos de construcción y participación no tienen un carácter individualista, sino que son procesos de co-construcción y co-participación, por lo que los procesos de interacción entre iguales son fundamentales para la adquisición del conocimiento matemático. En este sentido, tanto desde planteamientos sustantivos y teóricos de carácter general bien sea desde la perspectiva de la Escuela de Ginebra (conflicto socio-cognitivo), bien sea desde la perspectiva vygotskiana (zona de desarrollo potencial), como desde planteamientos específicos (investigaciones específicos sobre aprendizaje cooperativo), se ha puesto de manifiesto la rentabilidad de estos procesos en relación de colaboración, de cooperación o de tutoría (Serrano, González-Herrero & Pons, 2008; Pons, González-Herrero & Serrano, 2008).

2.3 DEFINICIÓN DE TÉRMINOS BÁSICOS

2.3.1 Didáctica

La didáctica lo definimos como los métodos y las técnicas para mejorar la enseñanza de la matemática, con el fin de conseguir que los conocimientos lleguen de una forma más eficaz a los educados

2.3.2 Matemática

La matemática definimos como, el conjunto de conocimientos construidos por el hombre, basados en la ciencia de los números que está en constante reinvención y descubrimiento con la finalidad de explicar la realidad y para satisfacer sus necesidades.

2.3.3 Matemática Recreativa

La matemática recreativa definimos como la obtención de resultados acerca de actividades lúdicas, y también la que se dedica a difundir o divulgar de manera entretenida y divertida los conocimientos o ideas o problemas matemáticos.

2.3.4 Conocimiento

El conocimiento definimos como el conjunto de información obtenida por los estudiantes mediante la experiencia o el aprendizaje de la matemática (a posteriori), o a través de la introspección (a priori).

2.3.5 Conocimiento Matemático

Definimos el conocimiento matemático de una persona bien preparada, pero no comprende el conocimiento más especializado que se requiere en la enseñanza en sí dentro del aula.

2.4 HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN

2.4.1 General

El valor didáctico de la matemática recreativa mejora significativamente los conocimientos matemáticos de los estudiantes del I semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión.

2.4.2 Específicos

- El álgebra recreativa como estrategia, mejora significativamente los conocimientos de la tercera unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I en los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación.
- La aritmética recreativa como estrategia influye significativamente en los conocimientos en la cuarta unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación.
- Existe diferencias significativas entre el álgebra recreativa y aritmética de los conocimientos adquiridos entre la tercera y cuarta unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación.

2.5 SISTEMA DE VARIABLES DE INVESTIGACIÓN.

VARIABLE	DIMENSIONES	INDICADORES
Variable independiente La matemática recreativa	Problemas algebraicos recreativa	- Resuelve situaciones sobre los cuatro hermanos. - Establece un criterio para resolver el problema de Newton. - Resuelve situaciones sobre el caballo y el burro. - Relaciones situaciones sobre el barco y la balsa. - Analiza la velocidad media de un móvil. - Resuelve problemas sobre curiosidades y sorpresas. - Determina cálculos rápidos. - Resuelve problemas numéricos. - Resuelve problemas sobre curiosidades logarítmicas. - Analiza sobre los logarítmicos en la música.
	Problemas aritméticos recreativos	- Determina con facilidad las multiplicaciones abreviadas. - Establece los números 25 y 76. - Analiza los números infinitos. - Identifica la divisibilidad de por 11 y 19. - Resuelve problemas sobre los números compuestos. - Resuelve problemas relacionados a números

		primos. - Determina el mayor número primo conocido. - Analiza el teorema de Sofía Germain. - Analiza las ocasiones de no recurrir al algebra.
Variable dependiente Conocimientos matemáticos.	Conocimiento matemático especializado	- Conoce los conceptos fundamentales de cada uno de los tópicos de la unidad. - Conoce no sólo el cómo sino los porqués de lo que se va a enseñar. - Desglosa ideas y procedimientos matemáticos para hacerlos más simples para el estudiante. - Conoce las conexiones entre diferentes tópicos, entre diferentes conceptos e inclusive entre su materia y las demás del plan de estudios.
	Conocimiento para la instrucción	- Relevancia de los tópicos y de las ideas matemáticas. - Diseño y secuenciación de clases, actividades y tareas. - Selección de representaciones e ilustraciones apropiadas que exhiban nociones matemáticas. - Preparar y dar explicaciones

	Conocimiento de estudiantes	- Conoce la manera de pensar, las estrategias, dificultades y concepciones erróneas de los estudiantes. - Infiere y deduce lo que entienden los estudiantes y sus confusiones. - Entiende, analiza y evalúa sus métodos y soluciones.

CAPÍTULO III

METODOLOGÍA Y TÉCNICAS DE INVESTIGACIÓN

3.1 TIPO DE INVESTIGACIÓN

La presente investigación, es tipo cuasi-experimental: Descriptivo-Explicativa. Es Descriptiva, por cuanto tiene la capacidad de seleccionar las características fundamentales del objeto de estudio y su descripción detallada de las partes, categorías o clases de dicho objeto; y es explicativa, en la medida que se han analizado las causas y efectos de la relación entre variable independiente y dependiente. Bernal (2000).

3.2 DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

El diseño cuasi-experimental con pre y post prueba será elegido para comprobar la hipótesis causal que concuerda con la propuesta de Camphell y Stanley (1966), reproducido por Hernandez (2003:258). En términos de García (1994), es denominado diseño entre-grupos. El siguiente esquema corresponde a este tipo de diseño:

G. E.	O_1	X	O_2
	- -		
G. C.	O_3	-	O_4

O_1 y O_3	:	Aplicación del pre prueba antes de la investigación.
O_2 y O_4	:	Es la aplicación del post prueba después de la investigación
x		Matemática Recreativa como estrategia
-	:	El Espacio en blanco significa que el grupo trabajará en forma rutinaria
O_1 y O_2	:	Es el numerador, que es el grupo experimental
O_3 y O_4	:	Es el denominador, que conforma el grupo control
- - - - - - -	:	Los segmentos en línea indican que los grupos serán intactos es decir estudiantes tal como están conformados en cada aula.

3.3 POBLACIÓN Y MUESTRA

3.3.1 Población

La población estará representada por todos los estudiantes matriculados en el I Semestre en las Escuelas Profesionales de Educación Inicial, Primaria y Secundaria con sus diferentes menciones reconocidas por ANR, en el año 2009, de la Facultad de Ciencias de la Educación por el momento consideramos una población conocida de 348 estudiantes en el año 2015.

3.3.2 Muestra

La muestra de estudio es de tipo no probabilística del tipo intencional ya que los estudiantes están formados por tres Escuelas Profesionales como: Educación Inicial, Primaria y Secundaria por la cual será La Escuela de Educación Inicial del I Semestre como grupo experimental con 32 estudiantes y Educación Primaria del I Semestre como el grupo control con 35 estudiantes para el estudio de la investigación.

3.4 MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN

Para el desarrollo del presente trabajo de investigación se han empleado: El método científico, documental y bibliográfico y finalmente los métodos estadísticos. Ya que nos permitirá que a través del método científico se construirá modelo teórico de la matemática recreativa como estrategia y del desarrollo del conocimiento matemático de la unidades de estudio establecido por la Facultad de Ciencias de la Educación, con la finalidad de estructurar las variables de estudio.

3.5 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

3.5.1 Técnicas

Se aplicaron:

- Técnicas de observación.
- Técnica de la encuesta.
- L a entrevista.
- Pruebas

3.5.2 Instrumentos

Los instrumentos que se han utilizado durante el proceso de la investigación que nos permitieron realizar el trabajo en forma ordenada y metódica, se ha considerado los siguientes:

- Cuestionarios: que serán aplicados a las unidades de estudio.
- Ficha de observación: servirá para observar el trabajo de las unidades de estudio.
- Encuestas: que serán aplicados a las unidades de estudio.
- Fichas bibliográficas: que se utilizara para construir el marco teórico correspondiente.

3.6 TÉCNICAS DE PROCESAMIENTO DE DATOS.

3.6.1 Procesamiento Manual, Tabulación de los datos que fueron obtenidos durante la investigación realizada.

3.6.2 Procesamiento Electrónico, Se realizó a través del programa Excel y SPSS que nos sirvieron para analizar los resultados.

3.6.3 Técnicas Estadísticas, Para ordenar y tabular los datos se han aplicado las frecuencias absolutas y relativas tanto para la muestra de estudio elegido; para el análisis estadístico se utilizó las medidas de tendencia central, las medidas de variabilidad; como también se empleó las inferencias estadísticas para probar las hipótesis formuladas en la investigación.

3.7 SELECCIÓN Y VALIDACIÓN DE LOS INSTRUMENTOS DE INVESTIGACIÓN

3.7.1 Selección de los instrumentos

Los instrumentos utilizados previos a la investigación de las estrategias en el desarrollo de capacidades en la asignatura de lógico matemático I en los estudiantes de la Carrera Profesional de Inicial y Primaria de la UNDAC de Cerro de Pasco fueron:

a) Instrumento para validar el pre y post prueba, este instrumento fue tomado de JAEGER, R. (1976) donde se analiza el grado de relevancia o importancia de la prueba a través de los indicadores de: Imprescindible, Importante, Poco importante e Irrelevante (ver anexo No. 03).

b) Las pruebas de rendimiento, estos instrumentos lo constituye el pre y post prueba (ver anexo No. 04), constituido por veinte preguntas cada uno con diversos grados de dificultad, porque se desea establecer una diferenciación de rendimiento entre los estudiantes del grupo experimental y control, confeccionado y administrado un procedimiento evaluativo desde una perspectiva psicométrica. Las pruebas psicométricas que se consideró se caracteriza fundamentalmente por:

- Los resultados de las mediciones del aprendizaje de la enseñanza de la lógica matemática I se interpretaron comparando el rendimiento de cada grupo evaluado.

- Los juicios evaluativos no son absolutos sino relativos teniendo en cuenta las características de cada grupo.

- El desempeño grupal promedio y su variabilidad constituyen el marco de referencia para analizar y valorar la calidad del rendimiento

3.7.2 Validación de instrumento

Para la validación de los diferentes instrumentos utilizados se solicitó a los diferentes Magíster y Doctores a través de una carta la validación de los instrumentos a fin de dar validez y confiabilidad con el fin de obtener objetividad de los instrumentos elaborados para la investigación.

a) Validez de contenido

La validez de contenido se ha realizado teniendo en cuenta las unidades II y III de la asignatura de lógico matemático I del plan de estudios de la Carrera Profesional de Derecho de la UNDAC. Para ello se ha utilizado un instrumento en la cual lo he denomine informe de opinión (ver anexo No) y cuyos resultados de los expertos se muestran en el siguiente cuadro:

CUADRO No. 06. Resultados de valoración de los contenidos de las unidades II y III de la asignatura lógico matemática I.

EVALUADOR EXPERTO	GRADO E INSTITUCIÓN QUE LABORA	VALORACIÓN PORCENTUAL
Dr. Germán Dionisio Anco Torres	Doctor en Ciencias de la Educación	89 %
Mg. Werner Surichaqui Hidalgo	Docente principal de la Carrera de Matemática – Física de la UNDAC	90 %
Mg. Armando Carhuachin Marcelo	Coordinador de Practicas Profesionales de Educación Secundaria	81,5 %
Mg. Tito Rivera Espinoza	Docente asociado de la Carrera de Matemática – Física de la UNDAC	91 %
	PROMEDIO	**87,875%**

Fuente: Resultados de opinión de los expertos de los instrumentos - 2015.

Como el valor promedio porcentual obtenido es de 87,875% obtenido en el cuadro anterior entre los expertos afirmamos que es aceptable porque se encuentra entre la escala de excelente entre los valores considerados; afirmamos que el instrumento elaborado es aceptable de los contenidos de la asignatura de lógico matemático I del Plan de Estudio de los estudiantes de Educación Inicial y Primaria de la UNDAC.

b) Validez de la prueba

Para verificar la validez de las pruebas de rendimiento, de los contenidos y objetivos de aprendizaje establecidos en el sílabo de Pensamiento Lógico Matemático I, se analizó dichas pruebas siguiendo la perspectiva psicométrica, para ello se tuvo las siguientes consideraciones del caso:

- Definimos el universo conductual para evaluar; en este caso se consideró las unidades II y III del sílabo de estudio.
- Redactamos los reactivos teniendo en cuenta a los objetivos de la Unidad II y III del silabo.

- Se sometió a la consideración a los docentes que estuvieron a su cargo la asignatura de Pensamiento Lógico Matemático I en el Semestre 2015 - A y luego se solicitó a los expertos para que analizaran a través del instrumento adjuntado en el anexo 05.
- Se elaboró una plantilla para analizar la correlación entre los expertos sobre la opinión de los diferentes ítems de las pruebas de rendimiento, considerando cuatros grados de relevancia de la prueba como: 1: Imprescindible, 2: Importante, 3: Poco Importante y 4: Irrelevante.

c) Confiabilidad de la prueba

Para verificar la confiabilidad de las pruebas elaborados, se aplicó a un grupo de estudiantes en forma aleatoria que no pertenecieron al grupo experimental y control, para estimar la correlación de los ítems se utilizó la fórmula de Kuder-Richardson 20 (KR 20), por tratarse de una prueba piloto con 10 ítems que se caracteriza por ser dicotómica, es decir 1 se refiere respuesta correcta y 0 respuesta incorrecta cuya ecuación es:

$$KR20 = r_{20} = \frac{k}{k-1}\left(\frac{s_t^2 - \Sigma pq}{s_t^2}\right)$$

Donde:

KR20	:	Coeficiente de correlación de Kuder-Richardson 20
K	:	Cantidad de ítems del instrumento
s_t^2	:	Varianza total de las puntuaciones obtenidas por todo los estudiantes del grupo piloto
p	:	Proporción de respuestas correctas a cada ítem.
q	:	Proporción de respuestas incorrectas de cada ítem.
Σpq	:	Suma total del producto de p por q para cada ítem

Los resultados del grupo Piloto se muestran en la siguiente tabla.

TABLA No.00 Resultados de la prueba piloto

Sujeto	item 1	Item 2	item 3	item 4	item 5	Item 6	Item 7	Item 8	Item 9	Item 10	total
1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	8
2	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	6
3	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	8
4	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	6
5	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	2
6	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	8
7	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	5
8	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	8
9	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	6
10	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	4
p	0.6	0.6	0.6	0.6	0.6	0.7	0.6	0.6	0.6	0.6	4.1
q	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.3	0.4	0.4	0.4	0.4	
pq	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.21	0.24	0.24	0.24	0.24	0.48

Calculando lo datos se tiene

KR20	:	Por calcular
K	:	10 ítems
s_t^2	:	4,10
Σpq	:	0,48

Reemplazado los valores en la fórmula:

$$KR20 = r_{20} = \frac{k}{k-1}\left(\frac{s_t^2 - \Sigma pq}{s_t^2}\right)$$

$$r_{20} = \frac{10}{10-1}\left(\frac{4{,}10 - 0{,}48}{4{,}10}\right)$$

$$r_{20} = 0{,}981$$

Según el valor obtenido, inferimos que el procedimiento utilizado para comprobar la confiabilidad de la prueba de rendimiento (post prueba) aplicado a 10 estudiantes es de 0,981; éste valor supera al límite del coeficiente de confiabilidad de +0,70; es decir existe una relación fuerte para los propósitos de confiabilidad psicométrica.

ASPECTO PRÁCTICO

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

En el presente capítulo se presenta los datos obtenidos de la aplicación de las pruebas al grupo experimental y control en las Unidades II y III del sílabo de la asignatura Pensamiento Lógico Matemático I. Como instrumento se usaron pruebas escritas de tipo de selección múltiple a ambos grupos. Los estudiantes del I Semestre 2013 - I de la Escuela Profesional de Educación Inicial y Primaria de la UNDAC, fueron expuestos a una serie de estrategias de aprendizaje por medio de matemática recreativa, 6 horas de clase semanales de cincuenta minutos desde el 08 de abril al 19 de julio de 2015.

Los resultados de la investigación se organizaron en dos aspectos: Resultados cuantitativos (puntuaciones obtenidas por los estudiantes del grupo experimental y control en la pre prueba y post prueba) y los resultados de la encuesta aplicado a los estudiantes.

4.1.1 Resultados del pre pruebas

Se aplicó una prueba antes de desarrollar la propuesta de investigación a los estudiantes de la muestra de estudio elegido, que son los estudiantes del I Semestre matriculados en 2015 – I, de la Escuela Profesional de Educación Inicial que fue considerado como grupo experimental, de la misma manera a los estudiantes del grupo control está constituido por los estudiantes Educación Primaria; que a continuación mostramos los siguientes resultados obtenidos:

TABLA No. 4.1 Distribución de frecuencia de la pre prueba del grupo experimental de la Escuela de Inicial de la UNDAC.

Notas	Frecuencia	Frecuencia acumulada	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
7	1	1	3,1	3,1
8	1	2	3,1	6,3
9	1	3	3,1	9,4
10	10	13	31,3	40,6
11	9	22	28,1	68,8
12	7	29	21,9	90,6
13	2	31	6,3	96,9
14	1	32	3,1	100,0
Total	**32**		**100,0**	

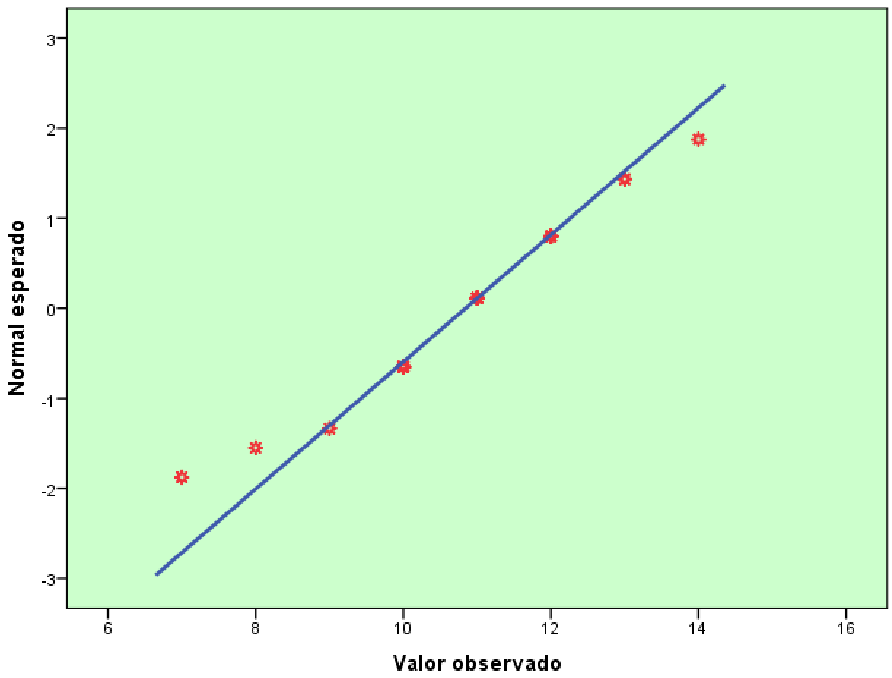
Fuente: Datos obtenidos por el investigador - 2013.

- En la tabla anterior se tiene que 22 estudiantes del grupo experimental de los estudiantes del I semestre de la Escuela Profesional de Educación Inicial de la UNDAC, tienen mayor e igual a 7 puntos y menor e igual a 11 puntos en la pre prueba que representa el 68,8% de la muestra de estudio.

- En la tabla se tiene que 10 estudiantes del grupo experimental I semestre de la Escuela Profesional de Educación Inicial de la UNDAC, tienen notas mayores que 12 puntos que representa el 31,3% de la muestra de estudio.

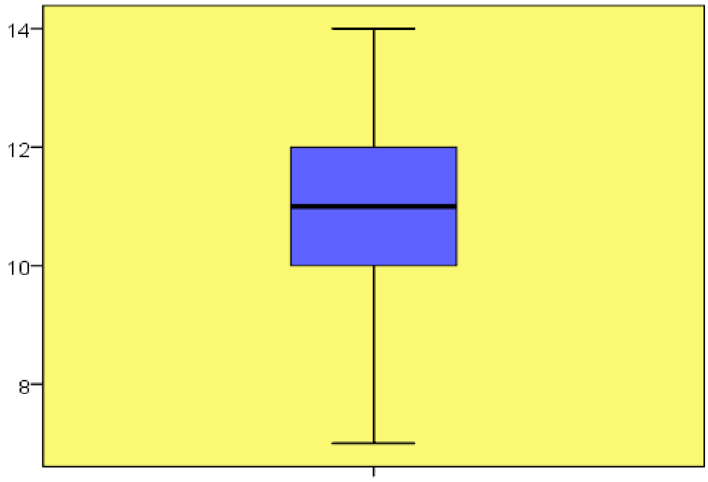
- Sólo el 3,1% del grupo experimental de los estudiantes del I semestre de la Escuela Profesional de Educación Inicial de la UNDAC, tiene la nota de 14 en la pre prueba.

GRAFICO No. Normalidad de los datos obtenidos



Examinamos la gráfica cuantilar normal obtenido. Como los puntos parecen estar razonablemente cerca de una línea recta y no parece haber un patrón sistemático distinto al de una línea recta, concluimos que las 32 notas de los estudiantes del grupo experimental parecen provenir de una población distribuida normalmente.

Grafico No. Diagrama de cajas



Analizando este diagrama se observa que la distribución de las notas es asimétrica por la derecha, no existen valores atípicos y que por debajo del primer cuartil se encuentra aproximadamente la misma cantidad de datos que por arriba del tercer cuartil. Asimismo, se nota que la mitad de las notas correspondientes a la parte central de su distribución, se encuentran entre un valor cercano a los 10 puntos y un valor cercano a 12 puntos.

TABLA No. 4.2 Resultados estadísticos descriptivos del pre prueba del grupo experimental de la Escuela de Educación Inicial de la UNDAC.

Media	10,84
Mediana	11,00
Moda	10
Desviación estándar	1,417
Varianza	2,007
Asimetría	-0,360
Mínimo	7
Máximo	14
Suma	347

Fuente: Resultados procesados por el investigador - 2013

- Los estudiantes del grupo experimental del I semestre de la Escuela Profesional de Educación Inicial de la UNDAC, tienen en promedio de 10,84 puntos en la pre prueba. El puntaje con mayor frecuencia de los estudiantes es de 10 puntos.
- El puntaje de los estudiantes del grupo experimental del I semestre de la Escuela Profesional de Educación Inicial de la UNDAC en la pre prueba, se dispersa en promedio 1,417 puntos con respecto al valor central en la pre test. Así mismo el puntaje obtenidos por los mencionados estudiantes, se dispersa en promedio en 2,007 puntos al cuadrado con respecto al valor central en el pre prueba.

TABLA No. 4.3 Distribución de frecuencia de la pre prueba del grupo control de la Escuela de Educación Primaria de la UNDAC.

Notas	Frecuencia	Frecuencia acumulada	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
8	2	2	5,7	5,7
9	7	9	20,0	25,7
10	6	15	17,1	42,9
11	9	24	25,7	68,6
12	7	31	20,0	88,6
13	4	35	11,4	100,0
Total	**35**		**100,0**	

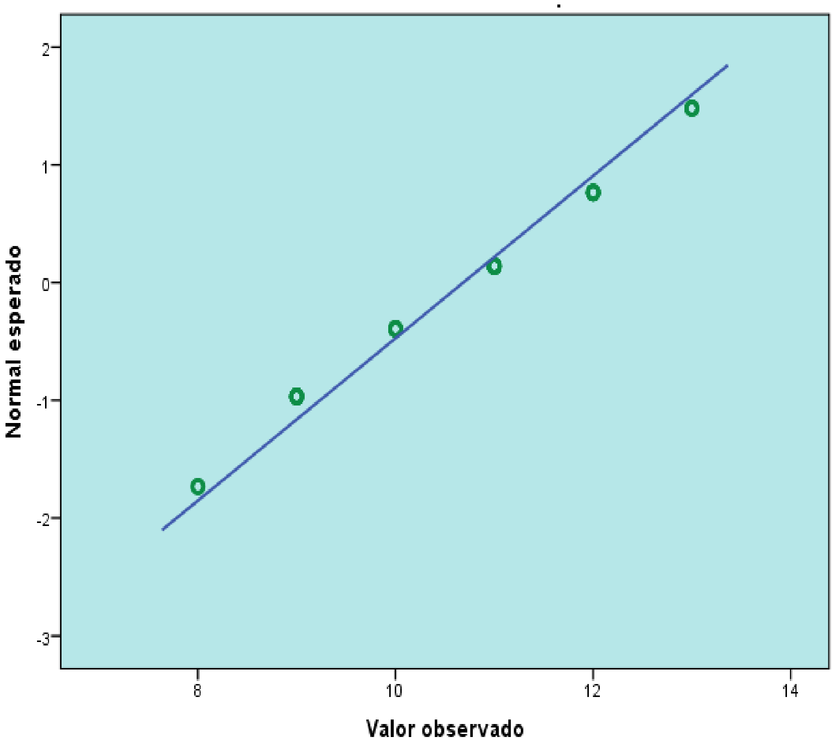
Fuente: Datos obtenidos por el investigador - 2013.

- En la tabla anterior se tiene que 24 estudiantes del grupo control de los estudiantes del I semestre de la Escuela Profesional de Educación Primaria de la UNDAC, tienen mayor e igual a 8 puntos y menor e igual a 11 puntos en la pre prueba que representa el 68,6% de la muestra de estudio.

- En la tabla se tiene que 11 estudiantes del grupo control I semestre de la Escuela Profesional de Educación Primaria de la UNDAC, tienen notas mayores que 12 puntos que representa el 31,4% de la muestra de estudio.

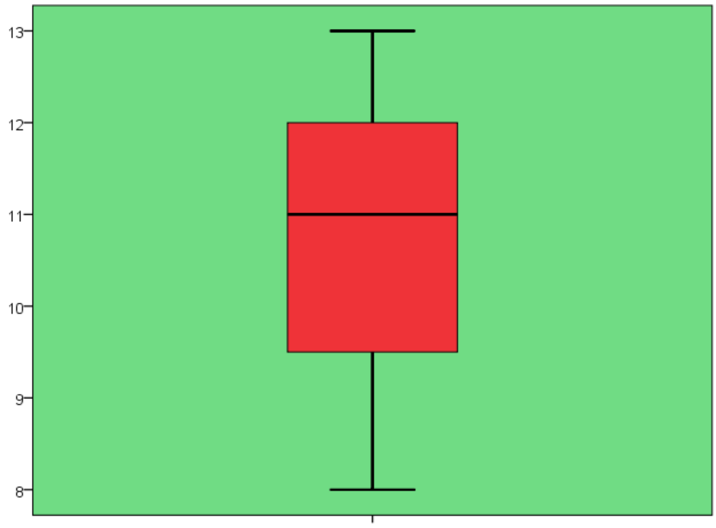
- Sólo el 14,4% del grupo control de los estudiantes del I semestre de la Escuela Profesional de Educación Primaria de la UNDAC, tiene la nota de 13 en la pre prueba.

GRAFICO No. Normalidad de los datos obtenidos



Examinamos la gráfica cuantilar normal obtenido. Como los puntos parecen estar razonablemente cerca de una línea recta y no parece haber un patrón sistemático distinto al de una línea recta, concluimos que las 35 notas de los estudiantes del grupo experimental parecen provenir de una población distribuida normalmente.

Grafico No. Diagrama de cajas



Analizando este diagrama se observa que la distribución de las notas es asimétrica por la izquierda, no existen valores atípicos y que por debajo del primer cuartil se encuentra aproximadamente la misma cantidad de datos que por arriba del tercer cuartil. Asimismo, se nota que la mitad de las notas correspondientes a la parte central de su distribución, se encuentran entre un valor cercano a los 9 puntos y un valor cercano a 12 puntos.

TABLA No. 02 Resultados estadísticos descriptivos de la pre prueba del grupo control de la Escuela de Educación Primaria de la UNDAC.

Media	10,69
Mediana	11,00
Moda	11
Desviación estándar.	1,451
Varianza	2,104
Asimetría	-,086
Mínimo	8
Máximo	13
Suma	374

Fuente: Resultados procesados por el investigador - 2015

- Los estudiantes del grupo control del I semestre de la Escuela Profesional de Educación Primaria de la UNDAC, tienen en promedio de 10,69 puntos en la pre prueba. El puntaje con mayor frecuencia de los estudiantes es de 11 puntos.
- El puntaje de los estudiantes del grupo control del I semestre de la Escuela Profesional de Educación Primaria de la UNDAC en la pre prueba, se dispersa en promedio 1,451 puntos con respecto al valor central en la pre test. Así mismo el puntaje obtenidos por los mencionados estudiantes, se dispersa en promedio en 2,104 puntos al cuadrado con respecto al valor central en el pre prueba.

4.1.2 Resultados del pos pruebas

Se aplicó una prueba después de desarrollar la propuesta de investigación a los estudiantes de la muestra de estudio elegido, que son los estudiantes del I Semestre matriculados en 2015 – I, de la Escuela Profesional de Educación Inicial considerado como grupo experimental, de la misma manera a los estudiantes del grupo control está constituido por los estudiantes de la Escuela Profesional de Educación Primaria; que a continuación mostramos los siguientes resultados obtenidos:

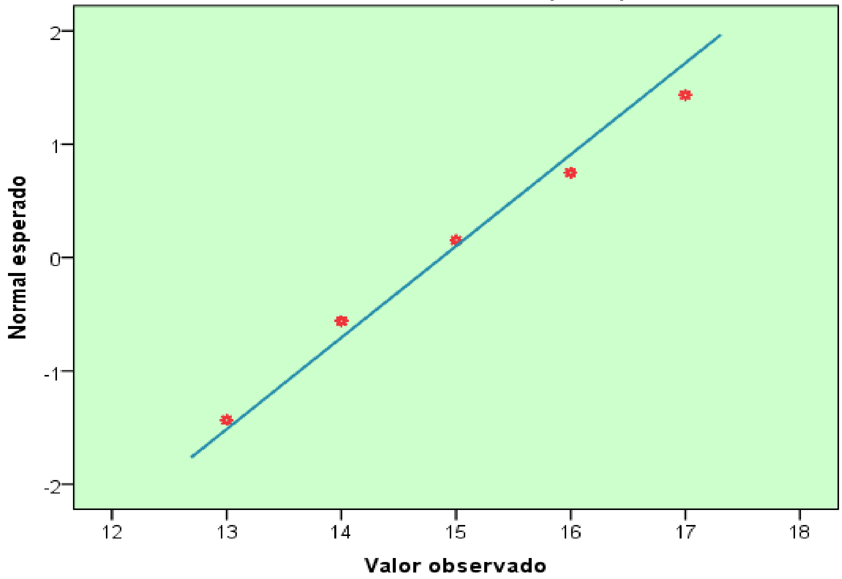
TABLA No. 01 Distribución de frecuencia de la pos prueba del grupo experimental de la Escuela de Educación Inicial de la UNDAC.

Notas	Frecuencia	Frecuencia acumulada	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
13	4	4	12,5	12,5
14	10	14	31,3	43,8
15	8	22	25,0	68,8
16	6	28	18,8	87,5
17	4	32	12,5	100,0
Total	**32**		**100,0**	

Fuente: Datos obtenidos por el investigador - 2013.

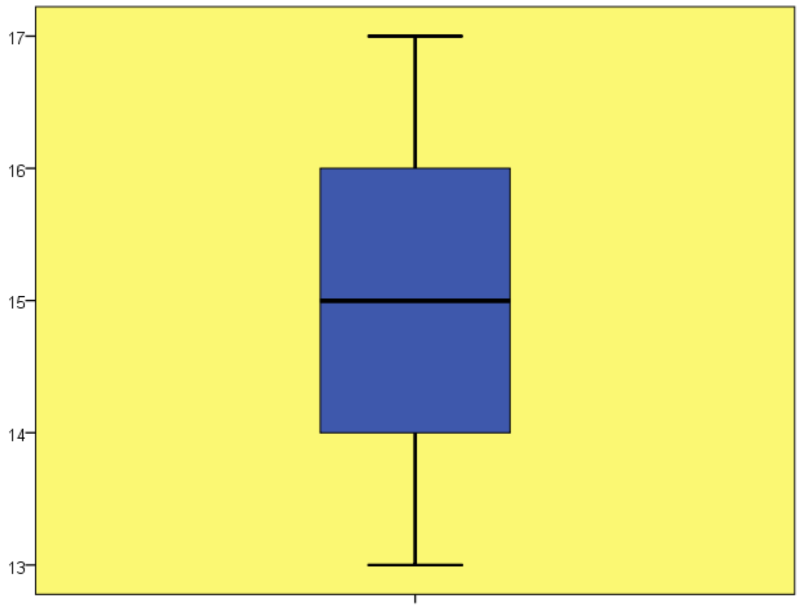
- En la tabla anterior se tiene que 14 estudiantes del grupo experimental de los estudiantes del I semestre de la Escuela Profesional de Educación Inicial de la UNDAC, tienen mayor e igual a 13 puntos y menor e igual a 14 puntos en la pos prueba que representa el 31,3% de la muestra de estudio.
- En la tabla se tiene que 10 estudiantes del grupo experimental I semestre de la Escuela Profesional de Educación Inicial de la UNDAC, tienen notas mayores que 14 puntos que representa el 31,3% de la muestra de estudio.
- Sólo el 12,5% del grupo experimental de los estudiantes del I semestre de la Escuela Profesional de Educación Inicial de la UNDAC, tiene la nota de 17 en la pos prueba.

GRAFICO No. Normalidad de los datos obtenidos



Examinamos la gráfica cuantilar normal obtenido. Como se observa en el gráfico los puntos están muy a la línea recta y no parece haber un patrón sistemático distinto al de una línea recta, que concluimos que las 32 notas de los estudiantes del grupo experimental del I semestre de la Escuela Profesional de Educación Inicial de la UNDAC, provenir de una muestra distribuida normalmente.

Grafico No. Diagrama de cajas



Analizando este diagrama se observa que la distribución de las notas es asimétrica por la derecha y a la izquierda, no existen valores atípicos y que por debajo del primer cuartil se encuentra las notas menores que 14 la misma cantidad de datos que por arriba del tercer cuartel es de 16. Asimismo, se nota que la mitad de las notas correspondientes a la parte central de su distribución, se encuentran entre un valor cercano a los 14 puntos y un valor cercano a 16 puntos.

También se puede observar que el rango de las notas varía entre un valor mínimo cercano a los 13 de nota y un valor máximo cercano a los 17 de nota obtenidos por los estudiantes del grupo experimental en la pos prueba.

TABLA No. 02 Resultados estadísticos descriptivos de la pos prueba del grupo experimental de la Escuela de Educación Inicial de la UNDAC

Media	14,88
Mediana	15,00
Moda	14
Desv. típ.	1,238
Varianza	1,532
Asimetría	,252
Error típ. de asimetría	,414
Mínimo	13
Máximo	17
Suma	476

Fuente: Resultados procesados por el investigador - 2013.

- El puntaje de los estudiantes del grupo experimental del I semestre de la Escuela Profesional de Educación Inicial de la UNDAC en la pos prueba, se dispersa en promedio 1,238 puntos con respecto al valor central en la pre test. Así mismo el puntaje obtenidos por los mencionados estudiantes, se dispersa en promedio en 1,532 puntos al cuadrado con respecto al valor central en el pre prueba.

- Los estudiantes del grupo experimental I semestre de la Escuela Profesional de Educación Inicial de la UNDAC, tienen en promedio de 14,88 puntos en la pos prueba. Más del 50% de los estudiantes del grupo experimental tienen puntajes superiores e iguales a 15 en la pos prueba aplicada

TABLA No. 01 Distribución de frecuencia de la post prueba del grupo control de la Escuela de Educación Primaria de la UNDAC.

Notas	Frecuencia	Frecuencia acumulada	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
7	2	2	5,7	5,7
8	1	3	2,9	8,6
9	3	6	8,6	17,1
10	8	14	22,9	40,0
11	8	22	22,9	62,9
12	9	31	25,7	88,6
13	3	34	8,6	97,1
14	1	35	2,9	100,0
Total	**35**		**100,0**	

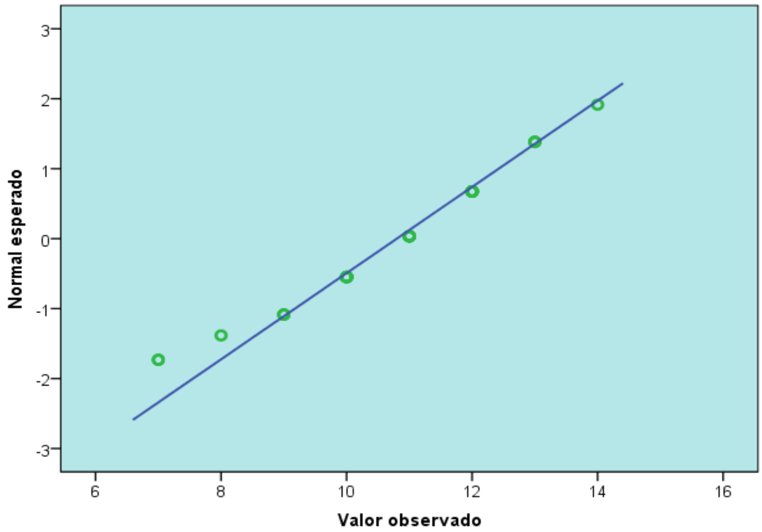
Fuente: Datos obtenidos por el investigador - 2013.

- En la tabla anterior se tiene que 14 estudiantes del grupo control de los estudiantes del I semestre de la Escuela Profesional de Educación Primaria de la UNDAC, tienen mayor e igual a 7 puntos y menor e igual a 10 puntos en la pos prueba que representa el 40% de la muestra de estudio.

- En la tabla se tiene que 12 estudiantes del grupo control I semestre de la Escuela Profesional de Educación Primaria de la UNDAC, tienen notas mayores que 12 puntos que representa el 25,7% de la muestra de estudio.

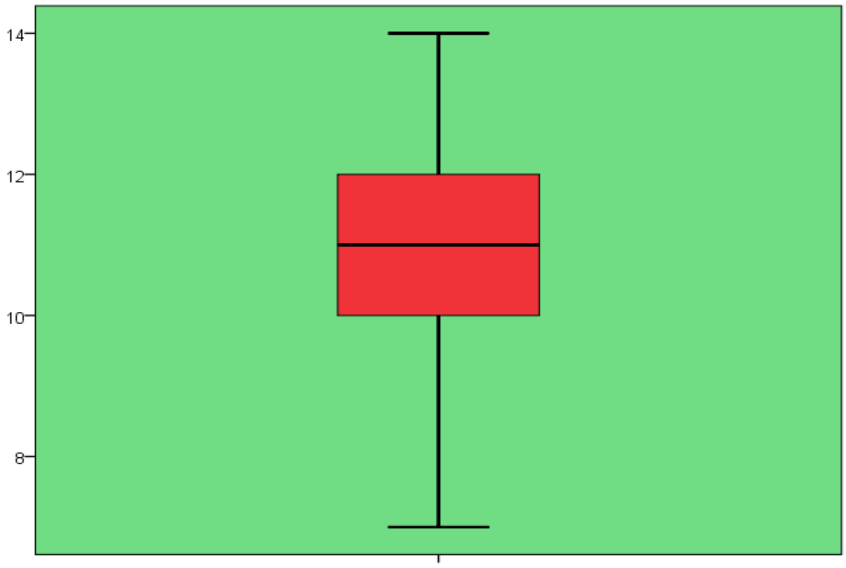
- Sólo el 2,9% del grupo control de los estudiantes del I semestre de la Escuela Profesional de Educación Primaria de la UNDAC, tiene la nota de 14 en la pos prueba.

GRAFICO No. Normalidad de los datos obtenidos.



Examinamos la gráfica cuantilar normal obtenido. Como los puntos parecen estar razonablemente cerca de una línea recta y no parece haber un patrón sistemático distinto al de una línea recta, concluimos que las 35 notas de los estudiantes del grupo control parecen provenir de una muestra distribuida normalmente.

Grafico No. Diagrama de cajas



Analizando este diagrama se observa que la distribución de las notas es asimétrica por la izquierda, no existen valores atípicos y que por debajo del primer cuartil se encuentra aproximadamente la misma cantidad de datos que por arriba del tercer cuartil. Asimismo, se nota que la mitad de las notas correspondientes a la parte central de su distribución, se encuentran entre un valor cercano a los 10 puntos y un valor cercano a 12 puntos.

También se puede observar que el rango de las notas varía entre un valor mínimo cercano a los 7 puntos de nota y un valor máximo cercano a los 17 puntos de nota obtenidos por los estudiantes del grupo control en la pos prueba.

TABLA No. 02 Resultados estadísticos descriptivos de la pos prueba del grupo control de la Escuela de Educación Primaria de la UNDAC.

Media	10,80
Mediana	11,00
Moda	12
Desv. típ.	1,623
Varianza	2,635
Asimetría	-,532
Error típ. de asimetría	,398
Mínimo	7
Máximo	14
Suma	378

Fuente: Resultados procesados por el investigador - 2013.

- Los estudiantes del grupo control del I semestre de la Escuela Profesional de Educación Primaria de la UNDAC, tienen en promedio de 10,88 puntos en la pos prueba. Más del 50% de los estudiantes del grupo control tienen puntajes superiores e iguales a 11 en la pos prueba aplicada.

- El puntaje de los estudiantes del grupo control del I semestre de la Escuela Profesional de Educación Primaria de la UNDAC en la pre prueba, se dispersa en promedio 1,451 puntos con respecto al valor central en la pre test. Así mismo el puntaje obtenidos por los mencionados estudiantes, se dispersa en promedio en 2,104 puntos al cuadrado con respecto al valor central en el pre prueba.

4.2 CONTRASTACIÓN DE HIPÓTESIS

Para probar las hipótesis planteado en nuestra investigación probamos por la prueba estadística de la **prueba z**[2], porque la muestra de estudio es más de 30 estudiantes; así mismo de los resultados estadísticos descriptivos obtenidos del pre prueba y post prueba de los grupos establecidos (experimental y control) defieren entre sí de manera significativa respecto de sus medias y varianzas.

"El valor didáctico de la matemática recreativa mejora significativamente los conocimientos matemáticos de los estudiantes del I semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión – 2016."

Para probar esta hipótesis, se analizó teniendo en cuenta el diseño establecido como fue el cuasi – experimental, con la finalidad de comparar la homogeneidad de los datos obtenidos en la pre prueba y pos prueba, así mismo se estableció un nivel de significación de 0,05 ó 95% de confiabilidad ($\alpha = 0{,}05_{2\ \text{colas}}$) por tratarse de una investigación de carácter educativo.

4.2.1 Prueba z para determinar la homogeneidad de la pre prueba entre grupos diferentes

Para analizar la prueba de hipótesis general, se analizó teniendo en cuenta las hipótesis específicas planteadas, antes de haber aplicado la variable independiente.

Hipótesis específica No 01

El álgebra recreativa como estrategia, mejora significativamente los conocimientos de la tercera unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I en los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación.

[2] Pérez De Vargas, V. (2002) *Bioestadística.* Madrid: Centro de Estudios Ramón Areces, p. 404

Para la cual plateamos las siguientes hipótesis estadísticas:

H_0: No existen diferencias significativas entre las medias del grupo experimental y control antes de haber aplicado álgebra recreativa como estrategia.

$\mu_E = \mu_C$ (Prueba de dos colas o bilateral)

H_1: Existen diferencias significativas entre las medias del grupo experimental y control antes de haber aplicado álgebra recreativa como estrategia.

$\mu_E \neq \mu_C$ (Prueba de dos colas o bilateral)

Si se cumple los supuestos de $\boldsymbol{z_{\alpha/2}}$, entonces $\boldsymbol{z_c}$ es el estadístico adecuado para probar la hipótesis planteada siguiendo el teorema central del límite:

$$z_c = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Donde: $\bar{x}_1$ = Media del grupo experimental

$\bar{x}_2$ = Media del grupo control

s_1^2 = Varianza del grupo experimental

s_2^2 = Varianza del grupo control

n_1 = Número de estudiantes del grupo experimental

n_2 = Número de estudiantes del grupo control

Aplicando SPSS, obtenemos las medidas de tendencia central y dispersión en la siguiente tabla:

TABLA No. 23 Resultados de las medidas de tendencia central y dispersión en la pre prueba.

GRUPOS	N		Media	Desv. típ.	Varianza
	Válidos	Perdidos			
GRUPO EXPERIMENTAL	32	0	10,84	1,417	2,007
GRUPO CONTROL	35	0	10,69	1,451	2,104

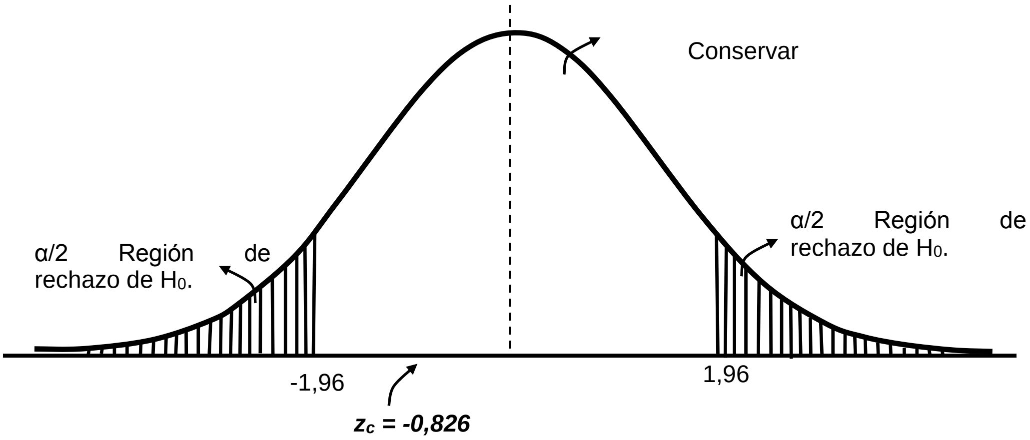
Fuente: Resultados procesados por el investigador - 2009.

Reemplazando estos resultados en la prueba $\boldsymbol{z_c}$:

$$z_c = \frac{10{,}84 - 10{,}69}{\sqrt{\frac{2{,}007}{32} + \frac{2{,}1043}{35}}} = -0{,}826$$

En la tabla el valor teórico o crítico de la prueba ***z*** con un nivel de significación de: $\alpha = 0{,}05_{2\ colas}$, es igual a 1,960 ($z_{\alpha/2} = 1{,}960$) y ubicando estos valores en el gráfico:

GRÁFICO No. 14



Decisión:

Como | z_c | < | $z_{\alpha/2}$ |, o sea | -0,826 | < | 1,960 |; es decir la razón observada de $\boldsymbol{z_c = 0{,}826}$ es menor que $\boldsymbol{z_{\alpha/2} = 1{,}960}$ y observando en el gráfico anterior el valor de z_c = 0,826 se encuentra en la región de aceptación de H_0, por lo tanto; aceptamos la hipótesis estadística nula.

Interpretación

En conclusión afirmamos que no existe diferencias estadísticas real entre las medias obtenidos por los estudiantes del grupo experimental y control en la pre prueba antes de la aplicación de la variable independiente, entonces se comprueba que los grupos en estudio son homogéneos.

4.2.2 Prueba z para determinar la homogeneidad de la pos prueba entre grupos diferentes

Para analizar la prueba de hipótesis general, se analizó teniendo en cuenta las hipótesis específicas planteadas, después de haber aplicado la variable independiente.

Para la cual plateamos las siguientes hipótesis estadísticas:

Hipótesis específica No. 02

> *La aritmética recreativa como estrategia influye significativamente en los conocimientos en la cuarta unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación*

La aritmética recreativa como estrategia influye significativamente en los conocimientos en la cuarta unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación

H_0: No existen diferencias significativas entre las medias del grupo experimental y control después de haber aplicado la aritmética recreativa como estrategia.

$\mu_E = \mu_C$ (Prueba de dos colas o bilateral)

H_1: Existen diferencias significativas entre las medias del grupo experimental y control después de haber aplicado la aritmética recreativa como estrategia.

$\mu_E \neq \mu_C$ (Prueba de dos colas o bilateral)

Si se cumple los supuestos de $\boldsymbol{z_{\alpha/2}}$, entonces $\boldsymbol{z_c}$ es el estadístico adecuado para probar la hipótesis planteada siguiendo el teorema central del límite:

$$z_c = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Aplicando SPSS, obtenemos las medidas de tendencia central y dispersión en la siguiente tabla:

TABLA No. 23 Resultados de las medidas de tendencia central y dispersión de la pos prueba.

GRUPOS	N		Media	Desv. típ.	Varianza
	Válidos	Perdidos			
GRUPO EXPERIMENTAL	32	0	14,88	1,238	1,532
GRUPO CONTROL	35	0	10,8	1,623	2,635

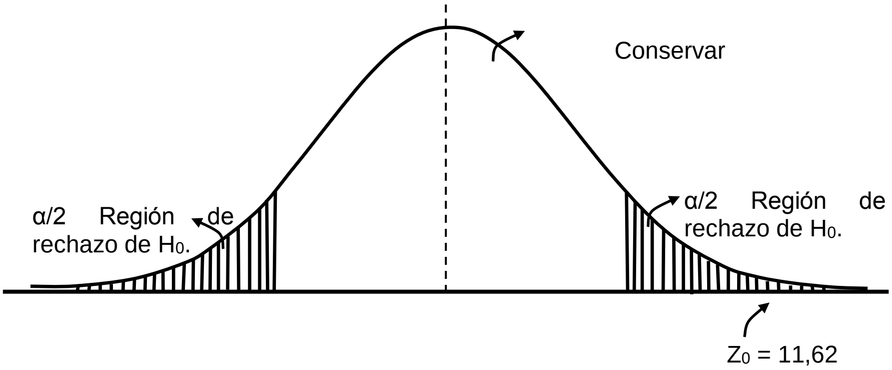
Fuente: Resultados procesados por el investigador - 2009.

Reemplazando estos resultados en la prueba $\boldsymbol{z_c}$:

$$z_c = \frac{14,88 - 10,80}{\sqrt{\frac{1,532}{32} + \frac{2,635}{35}}} = 11,624$$

En la tabla el valor teórico o crítico de la prueba $\boldsymbol{z}$ con un nivel de significación de: $\alpha = 0,05_{2\ colas}$, es igual a 1,960 ($z_{\alpha/2} = 1,960$) y ubicando estos valores en el gráfico:

GRÁFICO No. 15



Decisión:

Como | z_c | < | $z_{\alpha/2}$ |, o sea | 11,624 | > | 1,960 |; es decir la razón observada de $\mathbf{z_c = 11,624}$ es mayor que $\mathbf{z_{\alpha/2} = 1,960}$ y observando en el gráfico anterior el valor de z_c = 11,624 se encuentra en la región de rechazo de H_0, por lo tanto; rechazamos la hipótesis estadística nula.

Interpretación

En conclusión afirmamos que existen diferencias estadísticas significativas entre las medias obtenidos en la post prueba por los estudiantes del grupo experimental y control, entonces se comprueba que la variable independiente mejora las *capacidades en la asignatura de lógico matemático en los estudiantes del I Semestre de la de la Facultad de Ciencias de la Educación en la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión – 2015".*

4.2.3 Prueba t para determinar el contraste de muestras dependientes

El valor didáctico de la matemática recreativa mejora significativamente los conocimientos matemáticos de los estudiantes del I semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión – 2015.

Planteamos las hipótesis estadísticas:

H_0: No existe mayor éxito de estadísticas significativas entre las medias logrados en el rendimiento académico antes y después de aplicado la variable independiente en los estudiantes del grupo experimental.

$\mu_E = 0$.

H_1: Existe mayor éxito en las estadísticas significativas entre las medias logrados en el rendimiento académico antes y después de aplicado la variable independiente en los estudiantes del grupo experimental.

$\mu_E \neq 0$.

Como se trata de estudiantes del mismo grupo, el modelo estadístico que utilizaremos será la prueba ***t*** para dos muestras dependientes llamados también apareadas o relacionadas con una probabilidad de $\alpha = 0{,}05_{2\ \text{colas}}$ para las hipótesis planteadas.

TABLA No. 25 Prueba ***t*** para medias de dos muestras emparejadas del grupo experimental.

Prueba de muestras relacionadas

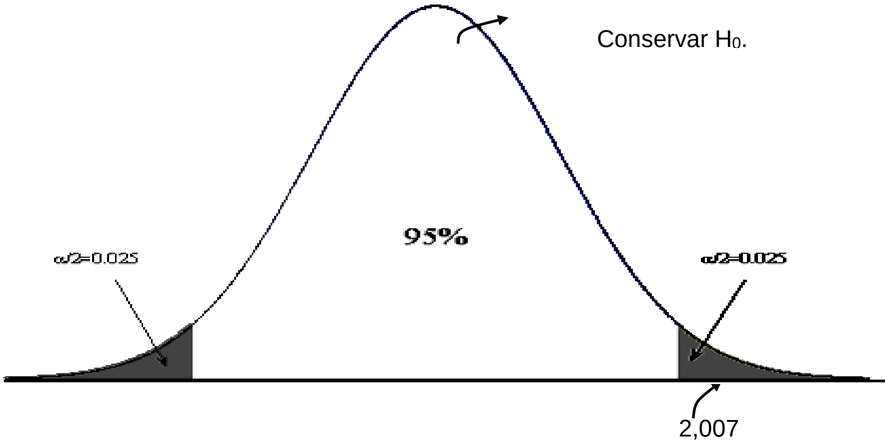
Resultados de muestra dependiente	Diferencias relacionadas					***t***	***gl***	***Sig. (bilateral)***
	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media	95% Intervalo de confianza para la diferencia				
				Inferior	Superior			
Antes y Después	4,031	1,787	0,316	3,387	4,675	**12,763**	**31**	**0,000**

Fuente: Resultados procesados por el investigador - 2015.

Los grados de libertad para el caso es: gl = n – 1 ⇒ gl = 32 – 1 = 31 grados de libertad. En la tabla valores críticos ***t*** Student se tiene que el valor crítico ó teórico de ***t*** de Student con α = 5% es:

$$\boldsymbol{t_{52;\alpha/2} = 2{,}041}$$

GRÁFICO No.



Decisión:

Tomando la decisión de rechazar o aceptar la hipótesis estadística, se tiene que el valor obtenido en la tabla anterior es de $\boldsymbol{t_o = 12,763}$ mayor que $\boldsymbol{t_{52;\alpha/2} = 2,007}$. Así mismo tenemos que la probabilidad $\boldsymbol{p < 0,05}$ por lo tanto

Interpretación:

Esto quiere decir que la diferencia de los puntajes en el rendimiento académico en la asignatura de lógico matemático I es significativo al nivel de 0,05 ($p < 0,05$); lo que significa que la variable independiente mejora significativamente las capacidades de aprendizaje de los estudiantes del I Semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la UNDAC.

4.3 DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Con el propósito de probar las hipótesis planteado en el trabajo de investigación se ha aplicado un test en dos momentos: antes y después de la acción de la variable independiente X: El valor didáctico de la matemática recreativa. El resultado de la aplicación se muestra en la siguiente tabla:

Tabla No. 10 Estadísticos obtenidos en la pre test y post test según los grupos establecidos.

	Pre Prueba del grupo experimental	Pos Prueba del grupo experimental	Pre Prueba del grupo control	Pos Prueba del grupo control
Media	10,84	14,88	10,69	10,80
Desv. típ.	1,417	1,238	1,451	1,623
Asimetría	-0,360	0,252	-0,086	0,532
Mínimo	7	13	8	7
Máximo	14	17	13	13

Fuente: Resultados del pre test y post test.

- Como se puede distinguir en la tabla anterior la diferencia entre los dos grupos la media de los puntajes obtenidos es muy pequeña (0,15 puntos) en la pre test; pero sí existe una diferencia entre las medias obtenidos en el post test del grupo experimental siendo de 4,04 puntos, mientras que en el grupo. Control es de 0,11 puntos; lo cual podemos decir que la variable independiente influye en el conocimiento de la matemática en los estudiantes del I Semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la UNDAC.

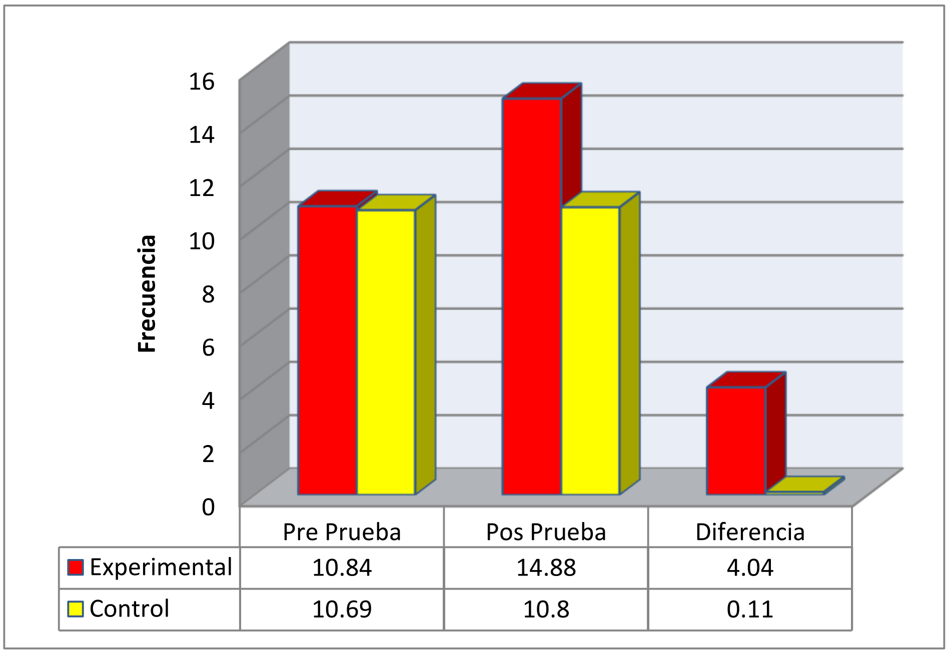
- La desviación típica del pre test y post test, nos permite afirmar que los puntajes obtenidos por los estudiantes del I Semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la UNDAC, se encuentran relativamente cerca al valor central, siendo de 1,238 puntos en los grupos experimental y para el grupo control de 1,623.

- Los puntajes alcanzados por los estudiantes del grupo experimental son superiores a los estudiantes del grupo control como se indica en la tabla anterior; es decir los límites de variación comprenden entre 13 a 17 puntos para el grupo experimental y de 7 a 13 puntos para el grupo control el pos prueba aplicado.

- Así, mismo se tiene que el grupo experimental ha mejorado con respecto a sus puntajes esto se debe a la aplicación de la variable independiente (Estrategias de aprendizaje), la tabla anterior se nota que existe una diferencia de 4,08 puntos con respecto al pre pos test de los estudiantes del grupo experimental y control del I Semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la UNDAC.

- Esta intuición queda confirmada con el índice de asimetría (0,252) para el grupo experimental y (0,532) para el grupo control que son positivos, lo que significa que los datos obtenidos del grupo experimental son homogéneamente; con esto afirmamos que la aplicación de las estrategias de aprendizaje mejora las capacidades del conocimiento matemático de los estudiantes del I Semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la UNDAC.

GRÁFICO No. 15



☞ Con los datos de la tabla 10 construimos la gráfica No 15. En ello observamos con más objetividad los resultados obtenidos en la pre y post test.

☞ En la letra **"A"**, los estudiantes del grupo experimental observamos que en la pre prueba obtuvieron una media de 10,84 puntos y en la post test una media de 14,88 puntos, existiendo una ganancia de 4,04 puntos que figura en **"C".**

☞ En la letra **"B"** los estudiantes del grupo control, observamos; que en la pre prueba obtuvieron una media de 10,69 puntos y en la post prueba una media de 10,80 puntos, existiendo una ganancia de 0,11 puntos que figura en **"C".**

☞ En **"C"** comparamos ganancias y pérdidas del grupo experimental y control, se observa claramente que el grupo experimental gana en 4,04 puntos y el grupo control sólo gana en 0,11 puntos en las pruebas aplicados a los estudiantes del I Semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la UNDAC.

4.3.1 Discusión respecto a las hipótesis

La discusión de las diferentes hipótesis estadísticas se realizó con las pruebas paramétricas como: La prueba ***Z*** con una muestra probabilística que examinamos a continuación para su discusión respectiva.

1º Los resultados del análisis de varianza, revela que no existen diferencias significativas ($p > 0,05$) entre las medias obtenidos en el rendimiento académico por los estudiantes del grupo experimental y control I Semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la UNDAC en el momento de la aplicación de la pre prueba; por que el valor obtenido ($Z_o = 0,826$) es menor que el valor teórico o crítico ($Z_{\alpha/2} = 1,960$); esto comprueba que los grupos en estudio antes de iniciar la investigación tienen conocimientos homogéneos o semejantes en el Lógico matemático en el año académico 2013 - A.

2º Realizando la comparación para el grupo experimental con respecto a la pre prueba y post prueba se tiene que $p < \alpha$ (0,000 < 0,05); entonces se pone de manifiesto que existe diferencias significativas en el aprendizaje de los estudiantes del I Semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la UNDAC. Es decir que a medida que los estudiantes adquieren los conocimientos de la matemática por medio de la constante aplicación de las estrategias de aprendizaje se obtienen mayores calificaciones en Lógico Matemático por los estudiantes del grupo experimental.

CONCLUSIONES

A continuación exponemos las conclusiones obtenidos en esta tesis, como respuestas a las preguntas de investigación planteadas, así mismo se expone los resultados de los objetivos de la investigación y finalmente se contrasta las hipótesis planteadas en la investigación.

1° Los estudiantes universitarios no hacen uso de estrategias de aprendizaje para aprender lógico matemáticas I, su mayor interés es adquirir los procedimientos matemáticos que les permitan resolver los problemas, en esa medida se orientan hacia el entrenamiento técnico, a través del cual logran resolver los problemas de manera automática y poco reflexivo.

2° Del grupo experimental y control sus conocimientos son similares al inicio de la investigación, pero durante el proceso de desarrollo de las lecciones de Lógico Matemática I, el grupo experimental mejora en su las capacidades.

3° Este estudio permite mostrar diferencias significativas en relación a la pre prueba del grupo experimental y control, analizado el contraste de hipótesis a partir de la prueba zo se concluye que el rendimiento académico de los estudiantes del I Semestre del año académico 2015 – A, de la Facultad de Ciencias de la Educación de la UNDAC no son significativa porque $p > \alpha$ (1,960 > 0,05); entonces la no aplicación de las estrategias de aprendizaje en la enseñanza de la matemática. Pero al realizar la comparación de la post prueba del grupo experimental y control mediante la prueba z_o, se observa que existe diferencias estadísticas significativa por $p < \alpha$ (1,960 < 0,05); es decir, se observa un aumento significativo en el rendimiento académico en los estudiantes del grupo experimental.

4° Las estrategias de aprendizaje mejora significativamente capacidades en la asignatura de lógico matemático en los estudiantes del I Semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación del grupo experimental porque los datos de contraste obtenidos con la prueba t Student con datos emparejados o dependientes, se tiene que $p < \alpha$ (0,000 < 0,05); porque se incrementa significativamente la aprobación de los estudiantes, pero disminuye significativamente la desaprobación de los estudiantes, de las diferentes actividades propuesta en relación al segmento, de las unidades desarrolladas en la investigación, a pesar de la casi total ausencia de respuestas adecuadas acerca de tales correspondencias, aparece un razonable aumento de respuestas adecuadas en lo que se refiere al contenido de la asignatura de Lógica Matemática I, en la Facultad de Ciencias de la Educación.

5° Finalmente la regulación y el control en las estrategias de aprendizaje son fundamentales para valorar el alcance de los objetivos, en este sentido se encontró que los estudiantes no hacen una planificación de la forma como deben resolver los problemas, la regulación del proceso está en función de una confrontación de la respuesta obtenida con la respuesta correcta del problema.

RECOMENDACIONES

1. Se recomienda implementar en las la matemática recreativa en los diferentes temas de la enseñanza de la matemática en los diferentes niveles de la educación de nuestro Región Pasco y a nivel nacional.

2. Se recomienda a los docentes de la especialidad de Matemática – Física, el valor de la importancia de la matemática recreativa para los estudiantes y así mismo dosificar el nivel de aprendizaje durante el proceso de enseñanza – aprendizaje que el docente desarrolla un tema de la matemática.

3. Se recomienda analizar el aspecto epistemológico de la matemática recreativa y diferenciar con la filosofía de la matemática con la finalidad de potenciar el nivel de aprendizaje de los estudiantes durante las actividades académicas que reciben los estudiantes en las aulas.

BIBLIOGRAFÍA

- Andrade, R. y Sánchez, L. (2010). *Habilidades intelectuales. Una guía pata su potenciación.* México: Alfaomega.
- Ávila, R (1990). *Introducción a la Investigación*. Lima: Ediciones CONCYTEC.
- Cantoral, R. y Farfan, R. (2008). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.
- Corvalán, F. (1995). *La matemática aplicada a la vida cotidiana*. Barcelona: Graó, de Serveis Pedagógicos.
- G. P. Box, Georg, Hunter, W. y otros. (1989). *Estadística para investigadores*. Barcelona: Editorial Revesté S.A.
- Gamarra, G. Rivera, T. Wong, F. y Pujay, O (2015). *Estadística e Investigación con SPSS.* Segunda Edición. Lima: San Marcos.
- Hernández Sampiere, Fernández Collado C. y Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. Cuarta Edición México: McGraw-Hill / Interamericana Editores S. A. de C. V.

- Holt, M. (1986). *Matemática Recreativa 2.* España: Martínez Roca, S. A.
- Kraitchik, M. (1946). *Matemáticas Recreativas.* Buenos Aires: El Ateneo.
- Kerlinger, F. y Howardb, L. (2001). *Investigación del Comportamiento*. México: McGraw-Hill Interamericana. Editores S. A. de C. V.
- Kilpatrick J., Gómez P., y Rico L. (1998) *Educación Matemática*. Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana, S. A. de CV.
- Gardner, M. (1996). *Los acertijos de Sam Loyd.* Madrid: Zugarto Ediciones.
- Gardner, M. (1999). *Nuevos acertijos de Sam Loyd.* Madrid: Zugarto Ediciones.
- Mala, M. (1998). *Juegos de ingenio III.* España: Robinbook.
- Pagano, R (1999). *Estadística Elemental para las Ciencias del Comportamiento*. México Editores Thomson.
- Perelman, Y (1978). *Algebra Recreativa.* URRS: Mir – Moscú.
- Perelman, Y (1978). *Matemática Recreativa.* España: Martínez Roca, S. A.
- Pizarro, R. y Crespo, N. (1997). *Inteligencias múltiples y aprendizajes escolares. Investigación en Proceso*. Universidad Católica de Valparaíso.
- Segarra, L. (2001). *Problemates: Colección de problemas matemáticos para todas las edades.* España: GRAÓ.
- Valiente, S. (2000) *Didáctica de la matemática: El libro de los recursos*, Madrid: Editorial La Muralla, S. A.
- YOUNG, J.W.A. (1970) *Fines, valor y métodos de la enseñanza matemática*. Buenos Aires: Losada, S.A.

ANEXO

ANEXO 1

MATRIZ DE CONSISTENCIA

Título: **EL VALOR DIDÁCTICO DE LA MATEMÁTICA RECREATIVA PARA OPTIMIZAR LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS DE LOS ESTUDIANTES DEL I SEMESTRE DE LA FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DANIEL ALCIDES CARRIÓN – 2016**

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	FORMULACIÓN DEL OBJETIVO	FORMULACIÓN DE LA HIPÓTESIS	VARIABLES E INDICADORES	METODOLOGÍA	TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
Problema General ¿Cuál es el valor didáctico de la matemática recreativa, para mejorar los conocimientos matemáticos de los estudiantes del I semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión - 2016? **Problemas Específicos:** - ¿Cómo el álgebra recreativa como estrategia mejora los conocimientos en la tercera unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación? - ¿De qué manera la aritmética recreativa como estrategia influye en los conocimientos en la cuarta unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación? ¿Cuál es la diferencia entre el álgebra recreativa y aritmética de los conocimientos adquiridos entre la tercera y cuarta unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación?	**Objetivo General** Analizar el valor didáctico de la matemática recreativa como herramienta para mejorar los conocimientos matemáticos de los estudiantes del I semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión – 2016. **Objetivos específicos** -Explicar las ventajas del álgebra recreativa como estrategia en la mejora de los conocimientos en la tercera unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación. -Explicar la influencia de la aritmética recreativa como estrategia en los conocimientos en la cuarta unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación. -Evaluar los resultados de la diferencia entre el álgebra recreativa y aritmética de los conocimientos adquiridos entre la tercera y cuarta unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación.	Hipótesis general: El valor didáctico de la matemática recreativa mejora significativamente los conocimientos matemáticos de los estudiantes del I semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión – 2016 **Hipótesis Especifico:** - El álgebra recreativa como estrategia, mejora significativamente los conocimientos de la tercera unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I en los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación. - La aritmética recreativa como estrategia influye significativamente en los conocimientos en la cuarta unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación. - Existe diferencias significativas entre el álgebra recreativa y aritmética de los conocimientos adquiridos entre la tercera y cuarta unidad de la asignatura del pensamiento lógico matemático I de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación.	**Variable independiente** La matemática recreativa - Establece un criterio para resolver el problema de Newton. - Resuelve problemas sobre curiosidades logarítmicas. - Determina el mayor número primo conocido. - Analiza el teorema de Sofía Germain. **Variable dependiente** Conocimientos matemáticos. - Conoce no sólo el cómo sino los porqués de lo que se va a enseñar. - Desglosa ideas y procedimientos matemáticos para hacerlos más simples para el estudiante. - Relevancia de los tópicos y de las ideas matemáticas. - Diseño y secuenciación de clases, actividades y tareas. - Infiere y deduce lo que entienden los estudiantes y sus confusiones. Entiende, analiza y evalúa sus métodos y soluciones.	**TIPO DE INVESTIGACIÓN** Es tipo cuasi-experimental: Descriptivo-Explicativa **MÉTODOS DE INVESTIGACIÓN** El método científico, documental y bibliográfico y finalmente los métodos estadísticos **DISEÑO DE INVESTIGACIÓN.** G. E. O_1 x O_2 - - - - - - - - - G. C. O_3 - O_4	**Técnicas:** - Técnicas de observación. - Técnica de la encuesta. - La entrevista. - Pruebas	▪ Observación Directa ▪ cuestionario ▪ Análisis Documental (formularios, fichas bibliografía, de resumen, cámara fotográfica) ▪ Registro de notas ▪ Prueba de desempeño académico

ANEXO 2

A continuación te presentamos un conjunto de enunciados: Léelos detenidamente y responde con qué frecuencia realizas cada uno de ellos.

5. Siempre 4. Muchas veces 3. Regularmente 2. Pocas veces 1. Nunca

Nº	**Ante una actividad de aprendizaje o problema**	**Siempre**	**Muchas veces**	**Regular**	**Pocas veces**	**Nunca**
1	Eres consciente de lo que piensas sobre el problema.					
2	Compruebas tus problemas mientras lo estás haciendo.					
3	Intentas descubrir las ideas principales o la información relevante de dicho problema.					
4	Intentas comprender los problemas antes de ponerte a resolverla.					
5	Eres consciente de qué técnica o estrategia de pensamiento usarlo.					
6	Identificas y corriges tus errores.					
7	Te preguntas cómo se relaciona la información importante del problema con lo que ya sabes.					
8	Intentas concretar qué se te pide en la tarea.					
9	Eres consciente de la necesidad de planificar el curso de tu acción.					
10	Una vez finalizada el problema, eres capaz de reconocer lo que dejaste sin realizar.					

ANEXO 3

UNIVERSIDAD NACIONAL DANIEL ALCIDES CARRIÓN

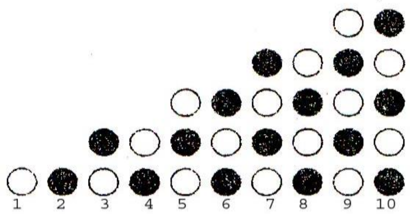
ESCUELA DE POSTGRADO

PRE - PRUEBA

INSTRUCCIONES

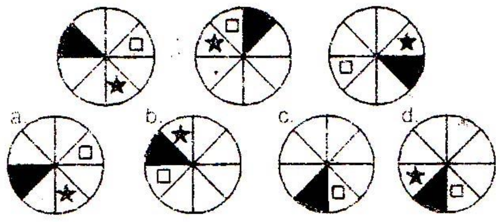
Estimado estudiante tiene 20 ítems para resolver en 60 minutos sólo una es la alternativa correcta marca la respuesta correcta en la hoja y luego espera la orden de tu profesor para la entrega; esto nos servirá para saber la importancia del razonamiento matemático que tienes.

1. Observa la secuencia. ¿Cuántas bolitas negras tendrá la columna 20?

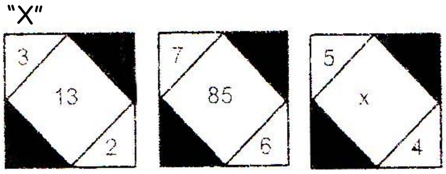


a. 5 b. 4 c. 6 d.3

2. En la siguiente secuencia, ¿Qué continua?

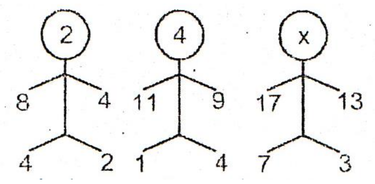


3. Sabiendo que los números de cada figura tienen el mismo patrón de formación, determinar el valor de "X"



a. 20 b. 41 c. 21 d. 29

4. Si se sabe que los números de cada figura cumplen el mismo patrón de formación, el valor de "X" es.



a. 5 b. 4 c. 3 d. 6

5. Cinco amigos: Lucia, Carla, Paula, José y Mario van al cine y encuentran una fila de 6 asientos libres. Si se sabe que:
   - El asiento vacío queda en un extremo.
   - Mario está en el otro extremo y a lado de Paula.
   - Lucia no está al lado de José. ¿Quiénes se ubican al lado de Carla?

a. Lucia y Paula
b. Lucia y José
c. José y Mario
d. Mario y Lucia

6. Cinco amigos se sientan alrededor de una mesa circular con asientos distribuidos simétricamente. Si se sabe que:
   - Antonio se sienta junto a José y Roberto.
   - José se sienta frente a María.
   - Junto a un hombre no se encuentra el asiento vacío. ¿Quién se sienta al frente de Cecilia?

a. Roberto
b. María
c. José
d. Antonio

7. David y Carlos tienen una rara característica: uno de ellos miente lunes, miércoles y viernes y dice la verdad los otros días; el otro miente martes, jueves y sábado y dice la verdad los otros días. Si cierto día dicen:
   - David: "Hoy es domingo"
   - Carlos: "Ayer fue domingo"
   - David: "Es verano"

Podemos afirmar que:
a. es domingo pero no es verano.
b. es un domingo de verano.
c. es lunes poro no es verano.
d. es domingo pero no es verano.

8. Piero, Ricardo y David viven en tres ciudades diferentes. Lima, Cuzco y Tacna; estudian una carrera distinta: educación, medicina e ingeniería; no necesariamente en ese orden. Se sabe que.
   - Piero no vive en Cuzco.
   - Ricardo no vive en Tacna.
   - El que vive en Cuzco no estudia medicina.
   - Quien vive en Tacna estudia ingeniería.

• Ricardo no estudia educación.

¿Dónde vive David y qué estudia?

a. Cuzco y estudia educación.
b. Tacna y estudia educación.
c. Cuzco y estudia medicina
d. Lima y estudia ingeniería

9. La sombra de un árbol que mide 3,5 m de alto es 1.4 m. Si a la misma hora del día un poste proyecta una sombra de 4 m. ¿cuál es la altura del poste?

a. 14 m   b. 12 m   c. 8 m   d. 10 m

10. Un propietario tiene 640 vacas que puede alimentar durante 65 días. ¿Cuántas vacas debe vender si quiere alimentar su rebaño por 15 días más dando la misma ración?

a. 150   b. 120   c. 720   d. 140

11. En una obra, tres obreros: Manuel, Nilton y Óscar trabajaron 6, 10 y 2 días respectivamente. Si deben repartirse S/. 360 en forma equitativa al trabajo realizado, ¿cuánto más le toca a Nilton que a Manuel?

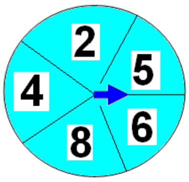
A. S/. 40
B. S/. 80
C. S/. 120
D. S/. 200

12. La clave de una cuenta tiene 5 caracteres. Los dos primeros pueden elegirse entre cuatro letras y los otros tres pueden elegirse entre tres cifras. ¿Cuántas posibles claves se pueden formar con estas condiciones?

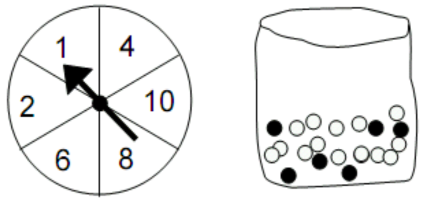
a) 60
b) 17
c) 432
d) 144

13. Para rifar un premio se utilizará una ruleta justo como la mostrada. El número ganador se obtendrá girando dos veces la ruleta y sumando los resultados obtenidos en cada giro. ¿Cuál de las siguientes sumas tiene más opción de salir?

A) 8
B) 9
C) 10
D) 12



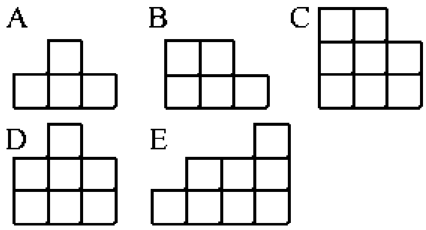
14. En un juego de una caseta de feria se utiliza en primer lugar una ruleta. Si la ruleta se para en un número par, entonces el jugador puede sacar una canica de una bolsa. La ruleta y las canicas de la bolsa se representan en los dibujos siguientes



Cuando se saca una canica negra se gana un premio. Daniela juega una vez. ¿Cómo es de probable que Daniela gane un premio?

A) Es imposible.
B) No es muy probable.
C) Es muy probable.
D) Tiene aproximadamente el 50% de probabilidad.
E) Es seguro.

15. Con cuatro de las siguientes cinco piezas se puede armar un cuadrado perfecto. Indica qué pieza no se debe utilizar.



16. Una empresa en la que se fabrican computadoras debe cancelar por concepto de luz, agua y renta del local una cantidad mensual fija de S/. 2500. Por otra lado cada computadora que se produce genera un gasto de S/. 900 en materia prima y S/. 350 en mano de obra. Si la empresa vende cada computadora en S/. 1500, **¿cuál será la utilidad que resulte de vender 300 computadoras al final del mes?**

a) 102 500 soles.   b) 72 500 soles.

c) 267 500 soles   d) 75 200 soles.

18. La suma de S+O+I es:

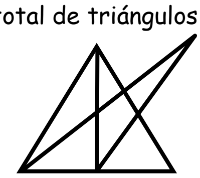
IS
+SO

SOS

a) 9   b) 10   c) 6   d) 7

19. Hallar el número total de triángulos en:

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13



ANEXO 4

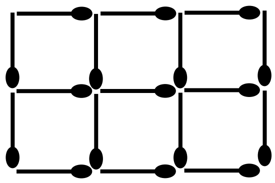
UNIVERSIDAD NACIONAL DANIEL ALCIDES CARRIÓN
ESCUELA DE POSTGRADO DOCENCIA EN EL NIVEL SUPERIOR
POS-PRUEBA

INSTRUCCIONES

Estimado estudiante tiene 20 ítems para resolver en 60 minutos sólo una es la alternativa correcta marca la respuesta correcta en la hoja y luego espera la orden de tu profesor para la entrega; esto nos servirá para saber la importancia del razonamiento matemático que tienes.

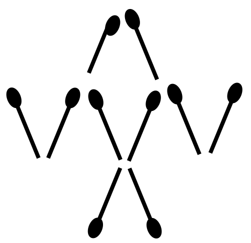
1. ¿Cuántos fósforos debemos quitar para formar tres cuadrados iguales?.

   a) 2
   b) 3
   c) 4
   d) 5
   e) 1



2. En la figura se tiene un cangrejo formado por palitos de fósforo. ¿Cuántos palitos como mínimo debemos mover para que el cangrejo mire hacia el sur?

   a) 1
   b) 2
   c) 3
   d) 4
   e) 5

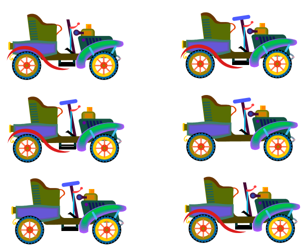


3. Entre 10 personas tenían que pagar una cierta cantidad de dinero, pero resulta que 4 de ellos solo pueden pagar la mitad de lo que les corresponde, obligando de esta manera a que cada uno de los restantes dé 40 soles más. Halla la cantidad de dinero a pagar.

   a) 110 b) 120 c) 80 d) 300

4. Dos son iguales.

   a) 1 y 4
   b) 2 y 3
   c) 2 y 5
   d) 1 y 6
   e) 4 y 5



5. Alfredo, Beto, Carlos y Diego son : mecánico, electricista, soldador y carpintero; llevan uniforme blanco, amarillo, rojo y azul. Además:

- El mecánico derrotó o Beto en sapo
- Carlos y el soldador juegan a menudo el Bingo con los hombres de rojo y azul.
- Alfredo y el carpintero tienen envidia del hombre de uniforme azul, quien no es electricista.
- El electricista usa uniforme blanco.

¿Qué oficio tiene Carlos?

a) ingeniero b) carpintero c) mecánico

d) electricista e) soldador

6. Del ejercicio anterior. ¿Quién usa uniforme amarillo?

a) Alfredo b) Beto c) Carlos

d) Diego e) a ó b

7. Clara tiene más dinero que Isabel pero menos que Paola, quien a su vez tiene lo mismo que Mary, quien tiene menos que Yacky. Si Angélica no tiene más que Paola, podemos afirmar.

I) Yacky tiene más que Clara.
II) Isabel tiene menor que Mary.
III) Isabel es la que tiene menos.

a) I y II b) I y III

c) II y III d) Todas e) F.D.

8. Alrededor de una mesa circular se sientan 6 personas ubicadas simétricamente si :

   - "A" está frente a "B" y al costado de "C"
   - "C" está frente a "F"
   - "D" está entre "A" y "F"

¿Entre quienes se encuentra "E" que es el último?

a) B y C b) B y A c) A y D

d) F y A e) F y B

9. En un corral se observa que el número de patos excede en 8 al número de pavos. Además, si incluimos 12 pavos y quitamos 10 patos, entonces el número de pavos sería el triple del número de patos.

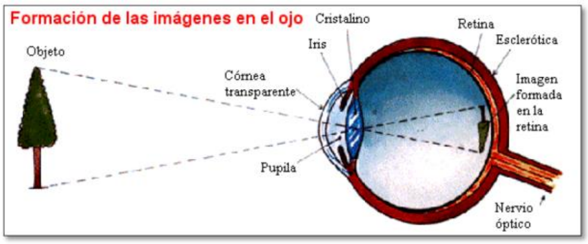
¿Cuál es el número de patos?

a) 17 b) 10 c) 8 d) 30

10. Mario dice: Ayer tuve la mitad de lo que tengo hoy, y lo que tengo hoy es el triple de lo que tuve anteayer, que es S/.40 menos de lo que tuve ayer.¿Cuánto tiene Mario?

a) 217 b) 210 c) 240 d) 430

11. Cristian investiga para la clase de CTA sobre la formación de las imágenes en el ojo, y ha encontrado la siguiente información:



A partir de la imagen, se da cuenta de que el árbol observado se refleja en nuestra retina de forma invertida. ¿Qué transformación geométrica se presenta en la formación de las imágenes en el ojo? ¿Serán semejantes los dos árboles mostrados en la imagen?

12. En una empresa de fabricación de botellas se cuenta con 40 trabajadores cuyos salarios son los siguientes:
S/.890; S/.1 050; S/.1 250; S/.950; S/. 850; S/.1 320; S/.1 000; S/.1 200; S/.1 300; S/.1 320; S/.1 200; S/.750 S/. 880 S/.960 S/.1 400 S/.1 050 S/.1 170 S/.1 200 S/. 850 S/.780 S/. 850 S/.1 170 S/.1 320 S/.1 400 S/.1 550 S/.1 680 S/.850 S/.1 050 S/.1 570 S/.990 S/.1 000 S/.1 650 S/.1 700 S/.1 650 S/.1 270 S/.1 450 S/. 880 S/.960, S/.1 580; S/.1 350.
Se desea incrementar el sueldo en S/. 300 a los trabajadores que ganan menos de S/. 1000, y en S/. 100 a los que ganen de S/ 1000 a más. **¿Cuánto dinero significa para la empresa este aumento de sueldo?**

a) S/. 3 600
b) S/. 2 800
c) S/. 6 600
d) S/. 12 000

13. Los siguientes datos **1, 2, 1, 2, 2, 1, 9, 1, 20, 6, 2** son los minutos de tardanza que tuvo Edgard a la hora de ingreso a su centro de labores durante el mes de Febrero.Calcula la cantidad de minutos que represente mejor los minutos de tardanza que tuvo Edgard durante ese mes.
Rpta:………………………………

14. La utilidad anual en soles de un almacén de neumáticos está representado por "u" y puede estimarse por medio de la función v(n) = 20n – 30 000, en la que "n" es el número de neumáticos vendidos por año.

a) Dibuja una gráfica de la utilidad, en relación con los neumáticos vendidos anualmente.
b) Estima el número de neumáticos que se deben vender para que la compañía no pierda ni gane.
c) Estima el número de neumáticos vendidos, si la compañía tuvo una utilidad de 70 000 soles.

15. Un autobús sale de la ciudad de Lima y se dirige a Huancayo a una velocidad promedio de 80 km/h. Una hora después, sale otro autobús también de la ciudad de Lima y con la misma dirección y destino que el anterior, a una velocidad promedio de 90 km/h. **¿En cuánto tiempo y a qué distancia de la ciudad de Lima alcanzará el segundo autobús al primero?**

Rpta:………………………………

16. Un tecnico en computación pone un negocio de reparación de computadoras y asesoría en cómputo. Después de formular cálculos, estima que el costo mensual para mantener el negocio se describe con la siguiente ecuación: **y = 20x + 460**, donde **x** es el número de clientes. Asimismo, concluye que sus ingresos mensuales son representados con la siguiente ecuación: y = 65x – 1700. **¿Cuántos clientes necesita para no ganar ni perder dinero y cuánto ganaría si tuviera 74 clientes?**

a) 48 clientes; 1 170 soles
b) 28 clientes; 1170 soles
c) 26 clientes; 1170 soles
d) 84 clientes; 1170 soles

17. La renta de dos casas en un año es de S/ 7360. **¿Cuál fue la renta mensual de cada casa si entre ellas hubo una diferencia de 120 soles, además, la casa con la renta más alta estuvo desocupada dos meses?**

a) 280 y 400 soles. b) 120 y 240 soles.

c) 380 y 500 soles. d) 61 y 181 soles.

18. La entrada para un parque de diversiones cuesta S/. 50 por adulto y S/. 25 por niño. Durante un día ingresaron 300 personas y pagaron en total S/. 12 250. **¿Cuántos niños y adultos ingresaron al parque?**

a) 190 adultos y 110 niños.
b) 110 adultos y 190 niños.
c) 50 adultos y 25 niños.
d) 245 adultos y 490 niños.

19. En un torneo deportivo 38 personas están jugando 13 partidos de tenis de mesa. Mientras que algunos partidos son individuales, es decir, dos personas participan en él, otros son dobles, por lo que cuatro personas lo practican. **¿Cuántos partidos individuales y dobles se están jugando?**

a) 24 partidos individuales y 14 dobles.
b) 14 partidos inviduales y 24 dobles.
c) 7 partidos individuales y 6 partidos dobles.
d) 6 partidos individuales y 7 partidos dobles.

20. El delfin mular mide 1,5 m al nacer y pesa alrededor de 30 kg. Durante su juventud son amamantados por un periodo de 15 meses, al final del cual miden 2,7 m y pesan 375 kg.

Siendo *L* la longitud en metros y *P* el peso en kilogramos de un delfín mular de **t** meses, expresa *L* en términos de t, si la relación entre *L* y **t** es lineal.

a) $L = \frac{2}{25}.t + \frac{3}{2}$

b) $L = \frac{1}{25}.t + \frac{3}{2}$

c) $L = \frac{25}{2}.t + \frac{2}{3}$

d) $L = \frac{2}{25}.t + \frac{1}{2}$